

一种新的峰谷分时电价定价模型及其仿真策略

唐捷¹,任震¹,陈亮²,刘奇²

(1. 华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640;

2. 广东省电力调度中心, 广东 广州 510600)

摘要: 针对目前我国电力市场严峻的电力供需形势以及分时电价机制, 借鉴国内外的一些先进经验, 提出了一种新的基于电力需求价格弹性矩阵的峰谷分时电价定价模型。电力需求价格弹性矩阵可由系统内所有典型行业在峰、平、谷各时段的平均电价和用电量求得。基于此, 还对所提出的峰谷分时电价定价模型的仿真策略和软件实现流程进行了详细的分析。该定价模型的实施有利于减小电网高峰负荷, 改善负荷曲线。

关键词: 电力市场; 需求侧管理; 分时电价定价模型; 需求价格弹性矩阵

中图分类号: TM 73; F 123.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-6047(2006)08-0001-04

电力需求侧管理 DSM (Demand Side Management) 的实施目标之一就是引导用户适当减少峰时段用电, 增加谷时段用电。峰谷分时电价是一项有效的 DSM 措施。它通过价格信号引导电力用户采取合理的用电结构和方式, 从而达到改善负荷曲线、移峰填谷、降低高峰负荷、减小峰谷差、降低生产成本、提高系统运行可靠性和经济性的目的^[1-6]。

本文针对目前我国电力市场严峻的电力供需形势以及分时电价机制, 基于对电力需求价格弹性的深入研究, 提出一种新的峰谷分时电价定价模型, 并对其仿真策略及软件实现流程进行了详细的研究。

1 峰谷分时电价定价模型

对于峰谷分时电价这项 DSM 措施而言, 能够正确、及时反映成本和供求关系的峰谷分时电价定价模型是其能否成功实施的关键因素, 也是吸引电网公司和用户积极参与 DSM 的有效激励手段。要制定合理的峰谷分时电价定价模型, 研究的重点之一应是电能需求随电价变动的规律 (即用户需求对分时电价的响应规律)。根据经济学原理, 用户对电价的响应与用户的需求价格弹性有关。因此, 本文运用需求价格弹性矩阵建立负荷模型, 并采用双目标规划对最高负荷和峰谷差进行优化, 从而建立峰谷分时电价的最优化定价模型。

1.1 需求价格弹性矩阵及其简化方法

由经济学原理可知, 典型的需求曲线 D 如图 1 所示, 其中 W_d 代表用电量, ρ 代表电价。需求曲线向右下方倾斜, 表明电价与用电量之间存在反方向变动的关系, 即用电量随电价的上升而减少, 随电价

的下降而增加, 这被称为需求定理^[1]。

电力需求价格弹性反映了用电量的相对变动对电价相对变动的反应程度。因此, 可定义某一时段 t 的电力需求价格弹性系数 ε_t 如式 (1) 所示:

$$\varepsilon_t = - \frac{\partial W_t / W_t}{\partial \rho_t / \rho_t} \quad (1)$$

式中 W_t 为时段 t 的用电量; ρ_t 为时段 t 的电价; ∂W_t 为 W_t 的相对增量; $\partial \rho_t$ 为 ρ_t 的相对增量。

在实际情况下, 用户在时段 t 的用电量不仅与当时的电价有关, 还将受到其他时段电价影响。式 (1) 中偏导符号的运用就是表示时段 t 的电量不仅是时段 t 电价的函数, 也是其他时段电价的函数。

因此, 对于时段 $1 \sim n$, 可得到如下公式^[7]:

$$\begin{bmatrix} \partial W_1 / W_1 \\ \partial W_2 / W_2 \\ \vdots \\ \partial W_n / W_n \end{bmatrix} = -E \begin{bmatrix} \partial \rho_1 / \rho_1 \\ \partial \rho_2 / \rho_2 \\ \vdots \\ \partial \rho_n / \rho_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \cdots & \varepsilon_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \rho_1 / \rho_1 \\ \partial \rho_2 / \rho_2 \\ \vdots \\ \partial \rho_n / \rho_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

式 (2) 中的 E 为电力需求价格弹性矩阵。对于实行峰谷分时电价而言, 可根据电力市场技术支持系统的先进程度, 将 1 d 等分为若干个时段。例如, 时段可以 1 h、0.5 h 或 15 min 为单位, 分别取 1~24、1~48 或 1~96 个等分段。本文以 1 h 为单位进行时段划分, 将 1 d 等分为 24 个时段, 即式 (2) 中的 $n = 24$ 。此时, 用电量 $W_t (t = 1, 2, \dots, 24)$ 在数值上等于该时段的平均负荷 P_t 。

为求取矩阵 E , 本文基于 2 个假设简化 E 。

a. 如果电价信息 $\rho_t (t = 1, 2, \dots, 24)$ 对于用户均

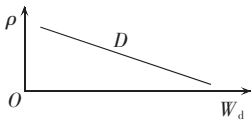


图 1 典型的需求曲线
Fig.1 Typical demand curve

是可知的,则矩阵 E 的上、下三角都应有非零元素分布。由文献[6]对峰谷时段划分的分析,可假设对任意时段用电量 $W_t (t=1, 2, \dots, 24)$ 有影响的时段范围为该时段及其前后 11 个时段(取此值可保证完全考虑峰、平、谷各时段电价对 W_t 的影响)。

b. 基于文献[7-8]对 E 特性的分析,本文假设:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \dots = \varepsilon_{nn} = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \dots = \varepsilon_{(n-1)n} = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{24} = \dots = \varepsilon_{(n-2)n} = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{32} = \dots = \varepsilon_{n(n-1)} = \varepsilon_{-1}$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{42} = \dots = \varepsilon_{n(n-2)} = \varepsilon_{-2}$$

综上所述,矩阵 E 可简化为

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon_{11} & 0 \\ \varepsilon_{-11} & \ddots & \ddots & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \ddots & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{-11} & \ddots & \varepsilon_{-1} & \varepsilon_0 & \ddots & \ddots & \varepsilon_{11} \\ 0 & \ddots & \varepsilon_{-11} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon_{-11} & \dots & \varepsilon_{-1} & \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

1.2 电力需求价格弹性系数的算法

式(2)中的电量和电价的变化率可由式(3)得到:

$$\frac{\partial W_t}{W_t} = \frac{W_{t2} - W_{t1}}{W_{t1}}, \quad \frac{\partial \rho_t}{\rho_t} = \frac{\rho_{t2} - \rho_{t1}}{\rho_{t1}} \quad (3)$$

式中 $t=1, 2, \dots, 24$; ρ_{t2}, ρ_{t1} 分别为目标日、基准日中时段 t 的电价; W_{t2}, W_{t1} 分别为目标日、基准日中时段 t 的用电量。

总之,以上数据均可根据已知的目标日、基准日历史数据求得。

然后,根据式(2)应用多元回归法即可求得电力需求价格弹性矩阵 E 。

1.3 目标函数

在形成矩阵 E 后,可根据不同的峰谷电价比例,应用式(2)(3)及已知的基准日历史数据预测出平均负荷 $P_t (t=1, 2, \dots, 24)$,并求出最高负荷和峰谷差。然后,可采用双目标规划[6]对这 2 个参数进行优化,最优值对应的分时电价体系即为所求。峰谷分时电价的最优化目标函数如式(4)所示:

$$F_1 = \min [\max_{\rho_f, \rho_p, \rho_g} P_t], \quad F_2 = \min [\max_{\rho_f, \rho_p, \rho_g} P_t - \min_{1 \leq t \leq 24} P_t] \quad (4)$$

式中 P_t 为时段 $t (t=1, 2, \dots, 24)$ 的平均负荷; $\max_{1 \leq t \leq 24} P_t$ 和 $\min_{1 \leq t \leq 24} P_t$ 分别为最高负荷和最低负荷; $\max_{1 \leq t \leq 24} P_t - \min_{1 \leq t \leq 24} P_t$ 为峰谷差; ρ_f, ρ_p, ρ_g 表示不同的分时电价体系(下标 f、p、g 分别表示峰、平、谷,下同)。

值得注意的是,利用本模型求得的最高负荷和最低负荷都是某一时段(1h)的平均负荷。随着电力市场技术支持系统的不断发展,只需逐步将时段划分得更细即可利用本模型求得更为精确的计算结果,如将 1d 等分为 48、96 或更多个时段。

1.4 约束条件

显然,1d 中的峰、平、谷各时段均应对应若干个彼此可能不相邻的等分时段[6](本文中以 1h 为单位)。假设峰、平、谷各时段分别对应 i, j, k 个等分时段($i+k+j=24$),并将这 24 个时段按峰、平、谷各时段的归属关系重新排序,排序后 24 个时段的平均负荷可分别记为 $P_{f,1}, \dots, P_{f,i}, P_{p,1}, \dots, P_{p,j}, P_{g,1}, \dots, P_{g,k}$ 。

DSM 措施的实施要求电网公司和用户都能从中受益[9]。因此,下面分别分析实行峰谷分时电价前后电网售电收入(用户支出)的变化。

a. 实行峰谷分时电价前电网每日的总售电收入(用户支出) R_1 为

$$R_1 = \sum_{t=1}^{24} P_t \rho_p \quad (5)$$

式中 P_t 为时段 $t (t=1, 2, \dots, 24)$ 的平均负荷; ρ_p 为电网平均销售电价。

b. 实行峰谷分时电价后每日峰、平、谷各时段的电网售电收入(用户支出)分别为 R_f, R_p, R_g :

$$R_f = \sum_{t=1}^i P_{f,t} \rho_f, \quad R_p = \sum_{t=1}^j P_{p,t} \rho_p \quad (6)$$

$$R_g = \sum_{t=1}^k P_{g,t} \rho_g, \quad i+k+j=24$$

式中 $P_{f,t}$ 为峰时段中时段 $t (t=1, 2, \dots, i)$ 的平均负荷; $P_{p,t}$ 为平时段中时段 $t (t=1, 2, \dots, j)$ 的平均负荷; $P_{g,t}$ 为谷时段中时段 $t (t=1, 2, \dots, k)$ 的平均负荷。

因此,实行峰谷分时电价后电网每日的总售电收入(用户支出) R_2 为

$$R_2 = R_f + R_p + R_g = \sum_{t=1}^i P_{f,t} \rho_f + \sum_{t=1}^j P_{p,t} \rho_p + \sum_{t=1}^k P_{g,t} \rho_g \quad (7)$$

另外,电网公司实行峰谷分时电价后得到的 DSM 基金补贴、电费补贴以及可节约的生产成本等与实施该项 DSM 措施所付出的所有成本之间的差值可视作为公司的收益 R_2' 。因此,峰谷分时电价最优化目标函数的约束条件[6]如下所示:

a. 电网公司受益约束 $R_2 + R_2' \geq R_1$;

b. 电力用户受益约束 $R_2 \leq R_1$;

c. 边际成本约束 假设谷时段的电网边际成本为 ρ_{gc} ,则谷电价必须大于 ρ_{gc} ,即 $\rho_{gc} \leq \rho_g \leq \rho_p$ 。

2 仿真策略研究

2.1 矩阵 E 的仿真方法

众所周知,目前峰谷分时电价这一 DSM 措施在我国的研究和应用才刚刚起步,并且现行的主要是峰谷价格和时段划分在较长的一段时间内均保持不变的峰谷分时电价体系,这不足以反映电力需求随电价的变化规律[7]。另外,峰谷分时电价的确定在一定程度上还依赖于电网公司市场策划人员的实际经验,缺乏足够的理论支撑。因此,我国需求侧电力市场

中急需一种可操作的,并能得到广泛认可的峰谷分时电价定价模型,而本文的研究内容可为这一问题提供一种行之有效的解决方案。

如前所述,在我国现行的峰谷分时电价体系中,峰谷价格和时段划分在较长的一段时间内均是保持不变的。但是,在这个体系中,峰谷分时电价又可以按照不同行业的负荷特性、不同供电电压等级等进行细分,且针对各不同行业、各不同电压等级用户实行的峰、谷、平各时段具体电价均互不相同,但时段划分保持不变。例如,广东省某市的现行峰谷分时电价情况如表 1 所示。

表 1 某市的现行峰谷分时电价情况		
Tab.1 A practical urban peak-valley tariffs		
用户	用电分类	电价/[元·(kW·h) ⁻¹]
平段	1~10 kV	0.6026
	35~110 kV	0.5926
	220 kV 及以上	0.5826
大工业	1~10 kV	0.9399
	35~110 kV	0.9241
	220 kV 及以上	0.9083
低谷	1~10 kV	0.3118
	35~110 kV	0.3068
	220 kV 及以上	0.3018
平段	不满 1 kV	0.8006
	1~10 kV	0.7906
	35 kV 及以上	0.7806
普通工业专变	不满 1 kV	1.2528
	1~10 kV	1.2370
	35 kV 及以上	1.2212
低谷	不满 1 kV	0.4108
	1~10 kV	0.4058
	35 kV 及以上	0.4008

由第 1 节所述可知,如想通过对本文所提定价模型进行实例仿真验证该模型的先进性,就必须基于合理的基准日、目标日历史负荷数据和电价信息。但是,由于目前针对某一行业、某一供电电压等级的用户所实施的是峰谷价格和时段划分均固定不变的峰谷分时电价体系,也就是说,如果针对某一行业、某一供电电压等级的用户,利用现有的历史负荷数据和电价信息为基础进行仿真,将使式(3)中的电价相对增量 $\partial\rho_i$ 为零,从而无法求出电力需求价格弹性矩阵 $\boldsymbol{E}$ 。在仿真过程中,这个问题可用以下方法加以有效解决。

首先,如前所述,本文以将 1 d 等分为 24 个时段为例进行仿真,如想使仿真结果更为精确,只需根据电力市场技术支持系统的先进程度,将时段划分得更细即可。在仿真过程中,可将实行相同峰谷分时电价的电力用户视为属于同一个典型行业。在由 m 个典型行业组成的用户系统中,虽然针对任一典型行业实行的峰谷分时电价是保持不变的,但是,若以该用户系统内所有典型行业在峰、平、谷各时段的平均电价和电量作为试验数据代入式(3),将使仿真成为可能,文献[7]中的实例仿真也验证了该方法的

可行性。整个用户系统在峰、平、谷各时段的平均电价和电量分别如式(8)(9)所示。

$$\bar{\rho}_f = \frac{\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^i W_{s,f,t} \rho_{s,f}}{\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^i W_{s,f,t}}$$
$$\bar{\rho}_p = \frac{\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^j W_{s,p,t} \rho_{s,p}}{\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^j W_{s,p,t}} \quad (8)$$
$$\bar{\rho}_g = \frac{\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^k W_{s,g,t} \rho_{s,g}}{\sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^k W_{s,g,t}}$$
$$i+k+j=24$$

式中 $W_{s,t}$ 为典型行业 s ($s=1,2,\cdots,m$;下同)在峰时段中时段 t ($t=1,2,\cdots,i$)的电量; $\rho_{s,f}$ 为典型行业 s 的峰时段电价; $W_{s,p,t}$ 为典型行业 s 在平时段中时段 t ($t=1,2,\cdots,j$)的电量; $\rho_{s,p}$ 为典型行业 s 的平时段电价; $W_{s,g,t}$ 为典型行业 s 在谷时段中时段 t ($t=1,2,\cdots,k$)的电量; $\rho_{s,g}$ 为典型行业 s 的谷时段电价; $\bar{\rho}_f$ 、 $\bar{\rho}_p$ 、 $\bar{\rho}_g$ 分别为整个用户系统的峰、平、谷时段平均电价。

$$\bar{W}_t = \sum_{s=1}^m W_{s,t} \quad (9)$$

式中 $W_{s,t}$ 为典型行业 s 在时段 t ($t=1,2,\cdots,24$)的电量; $\bar{W}_t$ 为整个用户系统在时段 t ($t=1,2,\cdots,24$)的平均电量。

仿真时,根据已知的基准日、目标日的各典型行业历史负荷、电价数据,运用式(8)分别求出整个用户系统在基准日、目标日的峰、平、谷时段平均电价,并将其代入式(3)。注意:式(3)中属于峰时段的各个等分时段电价都等于 $\bar{\rho}_f$,平、谷时段同理。然后,运用式(9)分别求出整个用户系统在基准日、目标日中时段 t ($t=1,2,\cdots,24$)的平均电量,并将其代入式(3),从而求得电力需求价格弹性矩阵 $\boldsymbol{E}$ 。

2.2 定价模型的软件实现

求得矩阵 $\boldsymbol{E}$ 后,可利用第 1.3 节提出的峰谷分时电价定价模型仿真出最优的峰谷分时电价方案。下面描述算法流程^[10]。

a. 赋初值。设置峰谷电价倍数 A ($A_{\max}$ 和 $A_{\min}$ 为其上下限,一般将 A 的初值设为 $A_{\min}$)、平时段电价 ρ_p (一般将 ρ_p 设为实行分时电价前的电网平均销售电价^[6])、谷时段电网边际成本 ρ_{gc} 、谷时段电价 ρ_g (一般将 ρ_g 的初值设为 ρ_{gc})、步长 d_1 和 d_2 等参数初值。此时,峰时段电价 $\rho_f=A\rho_g$ 。

b. 根据历史数据,应用式(8)(9)求得基准日、目标日中各时段的平均电价和电量,并将其代入式(2)(3)求出电量电价弹性矩阵 $\boldsymbol{E}$ 。

c. 将 ρ_g 、 ρ_p 、 $A\rho_g$ 及基准日历史数据代入式(2)(3),得到相应的最高负荷和峰谷差值。

d. 置 $A=A+d_2$,进行循环。判断:若 $A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$,将 ρ_g 、 ρ_p 、 $A\rho_g$ 及基准日历史数据代入式(2)(3),并应用式(5)(6)(7)形成双目标规划的约束条件,求解式(4)中的双目标规划,得到最优的最高负荷、峰

谷差及相应的谷电价 ρ'_g 和峰谷电价倍数 A' ;否则,继续。

e. 置 $\rho_g = \rho_g + d_1$,进行循环。判断:若 $\rho_{gc} \leq \rho_g \leq \rho_p$,初始化参数 A ,并转步骤c;否则,继续。

f. 计算结束。步骤d在最后一次循环中解得的最优解即为最优的峰谷分时电价定价方案。此时,最优的峰、平、谷时段电价分别为 $A\rho'_g$ 、 ρ_p 、 ρ'_g 。

3 结论

峰谷分时电价是一项有效的DSM措施。本文针对目前我国电力市场严峻的电力供需形势以及分时电价机制,借鉴国内外的一些先进经验,提出了一种新的基于电力需求价格弹性矩阵的峰谷分时电价定价模型。通过对其仿真策略和软件实现流程的详细分析证明所提出的峰谷分时电价定价模型是切实可行的,该模型不仅可用于我国现行电力市场中的分时电价制定,随着电力市场技术支持系统的不断完善,该模型在将来的实时电力市场中也具有广泛的应用前景。本文研究成果有利于减小电网高峰负荷,改善负荷曲线,提高系统运行可靠性和经济性,实现资源的优化配置和电力工业的可持续发展。

参考文献:

- [1] 姚建刚,章建. 电力市场分析[M]. 北京:高等教育出版社,1999.
- [2] CREW M A, FERNANDO C S, KLEINDORFER P R. The theory of peak-load pricing: a survey[J]. Journal of Regulatory Economics, 1995(8): 215 - 248.
- [3] DOORMAN G L, WANGENSTEEN I. Demand side provision of peaking capacity and reserves in deregulated power systems[C]// International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies 2000. London: IEEE, 2000: 290 - 295.
- [4] LUH P B, HO Y, MURALIDHARAN R. Load adaptive pricing: an emerging tool for electric utilities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27(2): 320 - 329.
- [5] 汤玉东,王明飞,吴军基. 基于DSM的分时电价研究[J]. 电力需

求侧管理, 2000(3): 14 - 16.

TANG Yu-dong, WANG Ming-fei, WU Jun-ji. Research on TOU price based on DSM[J]. Power Demand Side Management, 2000(3): 14 - 16.

- [6] 丁宁,吴军基,邹云. 基于DSM的峰谷时段划分及分时电价研究[J]. 电力系统自动化, 2001, 25(23): 9 - 13.
- [7] DING Ning, WU Jun-ji, ZOU Yun. Research of peak and valley time period partition approach and TOU price on DSM[J]. Automation of Electric Power Systems, 2001, 25(23): 9 - 13.
- [8] 秦祯芳,岳顺民,余贻鑫,等. 零售端电力市场中的电量电价弹性矩阵[J]. 电力系统自动化, 2004, 28(5): 16 - 19.
- [9] QIN Zhen-fang, YUE Shun-min, YU Yi-xin, et al. Price elasticity matrix of demand in current retail power market[J]. Automation of Electric Power Systems, 2004, 28(5): 16 - 19.
- [10] HE Y Q, DAVID A K. Time-of-use electricity pricing based on global optimization for generation expansion planning [C]// Proceeding of the 4th International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management. London: IEE, 1997: 668 - 673.
- [11] 曾鸣. 电力需求侧管理[M]. 北京: 中国电力出版社, 2001.
- [12] 孙为兵,刘一丹,吴敏,等. 基于ASP和SQL技术的DSM项目管理系统[J]. 电力自动化设备, 2004, 24(3): 22 - 25.
- [13] SUN Wei-bing, LIU Yi-dan, WU Min, et al. DSM management system based on ASP and SQL[J]. Electric Power Automation Equipment, 2004, 24(3): 22 - 25.

(责任编辑: 李玲)

作者简介:

唐捷(1979-),男,湖南湘潭人,博士研究生,从事电力需求侧管理、电力市场等方面的研究(E-mail: tangjiedavid@163.com);

任震(1938-),男,江苏宜兴人,教授,博士研究生导师,国务院学位委员会电气工程学科组成员,IEEE高级会员,主要研究方向为电力需求侧管理、电力市场、电力系统规划与可靠性、高压直流输电、小波分析及其在电力系统中的应用(E-mail: epzhren@scut.edu.cn);

陈亮(1977-),男,河南鹤壁人,工程师,从事电力需求侧管理和电网调度管理工作;

刘奇(1978-),男,湖南邵阳人,工程师,从事电力需求侧管理和电网调度管理工作。

Peak-valley tariff setting model and its simulation strategy

TANG Jie¹, REN Zhen¹, CHEN Liang², LIU Qi²

(1. Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. Guangdong Power Dispatch Center, Guangzhou 510600, China)

Abstract: Considering current power supply and demand conditions and TOU (Time-Of-Use) tariff mechanism in Chinese power market, a peak-valley tariff setting model based on the price elasticity matrix of demand is put forward by drawing on foreign and domestic experiences. The price elasticity matrix of demand can be calculated with the average tariff and quantity of peak, flat and valley periods for all typical industries. Furthermore, the simulation strategy and software implementation flow of the model are analyzed in detail. Its application can reduce peak load and improve load curve.

This project is supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province(000397).

Key words: power market; demand side management; TOU tariff setting model; price elasticity matrix of demand