微机保护测控装置定点数的开方计算方法

姚 斌[1],陈玉涛[2],李静正[1]
(1. 北京四方继保自动化股份有限公司,北京 100085; 2. 天津市电力公司,天津 300010)

摘要: 微机保护测控装置中经常遇到开方计算,其计算速度和精度直接影响到微机保护测控装置的性能。牛顿迭代法用于开方计算的主要难点是选取合适的迭代初值。分析了牛顿迭代法应用于开方计算所具有的特征,并利用其特征针对 2 种不同形式的开方运算分别提出了相对误差小且速度快的迭代初值选取方法。对于整数开方计算,根据被开方数二进制的位数确定最优的迭代初值;对于复数模形式的开方计算,根据复数的实部和虚部确定最优的迭代初值。与工程上传统采用的算法相比,该算法计算精度更高,计算量小(至多进行一次除法运算),主要针对定点数(整型数)的计算,但其算法思想及其关于迭代初值的选取方法和结论对于浮点数的开方计算也具有指导意义。
关键词: 开方计算; 牛顿迭代法; 初值; 相对误差
中图分类号: TM 77;TM 764.1 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-6047(2007)11-0042-03

0 引言

在微机保护测控装置中需要计算基波电压、电流的幅值,各次谐波的有效值等,这些都需要进行开方计算。特别是对于模拟量较多且要求快速动作的微机保护装置,如母差保护、多侧差动的变压器保护等装置,甚至在每个采样中断都要计算所有模拟量的幅值,进行大量的开方计算。因此,开方计算的速度和精度直接关系到微机保护装置的动作速度和精度[1-2]。

常见的开方算法是查表法、牛顿迭代法、分段线性化法及连续函数逼近法[3]。查表法的计算速度和精度主要取决于表格的容量和表格设计的合理性,为提高计算精度需要增加表格的容量,这既占用了微机的程序存储空间也增加了 CPU 查询表格的开销。牛顿迭代法有很好的收敛性,但其迭代初值与真值的接近程度直接决定了迭代的次数和计算精度[4]。牛顿迭代法需要进行除法运算,对于微机保护测控装置的 CPU 而言,除法运算是非常耗时的。选择合适的迭代初值,既可以提高计算的精度,也可以减少迭代的次数,同时减少除法运算的次数,大大节约 CPU 的开销。文章围绕相对误差小、除法运算少的原则给出了快速且精度更高的开方计算方法。

1 牛顿迭代法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f'(x)$ 也连续,且 $f'(x)\neq 0$,$f''(x)\neq 0$,$f(a)f(b)<0$,可用迭代公式 $x_n=x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$ 获得 $f(x)=0$ 的近似解[5-6]。

对于 $x=\sqrt{P}$,取 $f(x)=x^2-P$,迭代公式[7-8]为

$$x_n=(x_{n-1}+P/x_{n-1})/2$$

下面给出 $f(x)=x^2-P$ 使用牛顿迭代法的 2 个性质。

性质 1 迭代结果 x_n 一定是从大于 $\sqrt{P}$ 的值逐渐逼近到 $\sqrt{P}$。

证明 $x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{P}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{n-1}\dfrac{P}{x_{n-1}}}=\sqrt{P}$。

$x_n-x_{n-1}=(x_{n-1}+P/x_{n-1})/2-x_{n-1}=(P-x_{n-1}^2)/2x_{n-1}$,对于 $n\geqslant 2$,显然有 $P-x_{n-1}^2\leqslant 0$,即 $x_n-x_{n-1}\leqslant 0$。

性质 2 $P<ab$ 时,应取 $x_0=a$;$P\geqslant ab$ 时,应取 $x_0=b$;若 P 与 ab 的大小关系未知,宜取 $x_0=b$。

证明 当 $P=ab$,取 $x_0=a$ 时,$x_1=(x_0+ab/x_0)/2=(a+b)/2$;取 $x_0=b$ 时,$x_1=(x_0+ab/x_0)/2=(a+b)/2$。也就是说对于 $P=ab$,取 $x_0=a$ 和取 $x_0=b$ 的迭代结果是一样的。因此,$P<ab$ 时,取 $x_0=a$ 进行迭代更逼近真值;$P\geqslant ab$ 时,取 $x_0=b$ 进行迭代更逼近真值。

在数轴上,$\sqrt{ab}$ 分区间 $[a,b]$ 的比值为 $(b-\sqrt{ab})\div(\sqrt{ab}-a)=\sqrt{b}/\sqrt{a}>1$。也就是说,在 P 与 ab 值大小关系未知的情况下,要获得相同的迭代精度,取 $x_0=b$ 达到预期的可能性更大。因此,若 P 与 ab 的大小关系未知,宜取 $x_0=b$。

2 对于 $x=\sqrt{P}$ 的计算

对于任意正整数 P 总可找到整数 m 满足 $2^m\leqslant P<2^{m+1}$,即 $2^{m/2}\leqslant\sqrt{P}<2^{(m+1)/2}$。由性质 2 知,若 $P\geqslant 2^{m+1/2}$,应取 $x_0=2^{(m+1)/2}$;若 $P<2^{m+1/2}$,应取 $x_0=2^{m/2}$。

当 $P=2^{m+1/2}$ 且取 $x_0=2^{(m+1)/2}$ 时,相对误差最大。迭代 1 次后,相对误差为 $(\sqrt{2}+1)/2\sqrt[4]{2}-1$($\approx 1.5052\%$),

收稿日期:2006-10-31;修回日期:2007-03-26

迭代 2 次后,相对误差为$(9-3\sqrt{2})/4\sqrt[4]{2}$(≈0.011 2 %)。

无论 $x_0=2^{(m+1)/2}$ 还是 $x_0=2^{m/2}$,无论 m 是奇数还是偶数,迭代初值均可写成 $x_0=2^k$ 或 $x_0=\sqrt{2}\times 2^k$ 的形式。当 $x_0=2^k$ 时,$x_1=(2^k+P/2^k)/2$;当 $x_0=\sqrt{2}\times 2^k$ 时,$x_1=\sqrt{2}(2^k+P/2^{k+1})/2$。

显然,无论哪种形式,进行第 1 次迭代都不需要进行除法运算。

上述算法在确定 x_0 时需比较 P 和 $2^{m+1/2}$ 的大小,若不进行比较,根据性质 2 宜取 $x_0=2^{(m+1)/2}$。

当 $P=2^m$ 且取 $x_0=2^{(m+1)/2}$ 时,相对误差最大。此时,迭代 1 次后,相对误差为 $3\sqrt{2}/4-1$(≈6.066 0 %),迭代 2 次后的相对误差为 $17\sqrt{2}/24-1$(≈0.173 5 %)。

3　对于 $x=\sqrt{R^2+I^2}$ 的计算

对于 $x=\sqrt{R^2+I^2}$ 可先计算 $P=R^2+I^2$,然后再用 $x=\sqrt{P}$ 的方法来计算。

$x=\sqrt{R^2+I^2}$ 与 $x=\sqrt{P}$ 相比,已知的信息量更多。因此,可用利用 R、I 构造函数 $f(R,I)$ 来拟合开方结果 $\sqrt{R^2+I^2}$ 或拟合迭代初值 x_0。

取 $L=\max(|R|,|I|)$,$S=\min(|R|,|I|)$,令 $r=S/L$,有 $r\in[0,1]$。

下面用一次多项式 $f(L,S)=a(L+bS)$ 来拟合开方结果和迭代初值,并确定 a 和 b 的值使得 $r\in[0,1]$ 区间上的最大相对误差取得最小值。

3.1　一次多项式拟合开方结果

对于精度要求不高的场合,可以用一次多项式 $f(L,S)=a(L+bS)$ 来拟合 $\sqrt{L^2+S^2}$,相对误差为 $\left|a(1+br)/\sqrt{1+r^2}-1\right|$。

令 $g(r,a,b)=a(1+br)/\sqrt{1+r^2}-1$,其波形特征如图 1 所示。

$g'_r(r,a,b)=\dfrac{a(b-r)}{(1+r^2)\sqrt{1+r^2}}$,当 $r=b$ 时,$g(r,a,b)$ 取得极大值 $a\sqrt{1+b^2}-1$。在边界 $r=0$ 处,$g(r,a,b)=a-1$;在边界 $r=1$ 处,$g(r,a,b)=a(1+b)/\sqrt{2}-1$。要获得最小相对误差,应有 $|g(b,a,b)|=|g(0,a,b)|=|g(1,a,b)|$,即满足:

$$\begin{cases}\left|a\sqrt{1+b^2}-1\right|=|a-1|\\ \left|a(1+b)/\sqrt{2}-1\right|=|a-1|\end{cases}$$

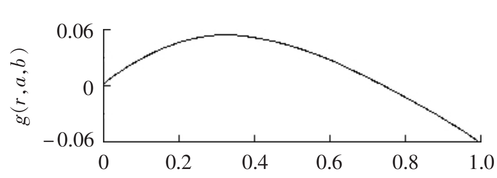

图 1 一次多项式拟合开方结果算法的相对误差曲线

Fig.1 Relative error curve using linear polynomial fitting square root algorithm

可得如下 3 组解:

$$\begin{cases}a_1=2/[\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}+1]\\ b_1=\sqrt{2}-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_2=2\sqrt{2}-2\\ b_2=1\end{cases},\quad \begin{cases}a_3=4-2\sqrt{2}\\ b_3=0\end{cases}$$

取第 1 组解时,最大相对误差达到最小值,其值为 $|a_1-1|$(≈3.956 6 %)。

3.2　一次多项式拟合迭代初值

用一次多项式 $f(L,S)=a(L+bS)$ 来拟合 x_0,迭代 1 次后 $x_1=\dfrac{L}{2}\left[a(1+br)+\dfrac{1+r^2}{a(1+br)}\right]$,由性质 1 知 x_1 不小于真值,因此 x_1 与真值的相对误差为

$$\frac{x_1}{L\sqrt{1+r^2}}-1\text{,即}\frac{a(1+br)}{2\sqrt{1+r^2}}+\frac{\sqrt{1+r^2}}{2a(1+br)}-1$$

令 $g(r,a,b)=\dfrac{a(1+br)}{2\sqrt{1+r^2}}+\dfrac{\sqrt{1+r^2}}{2a(1+br)}-1$,其波形特征如图 2 所示。

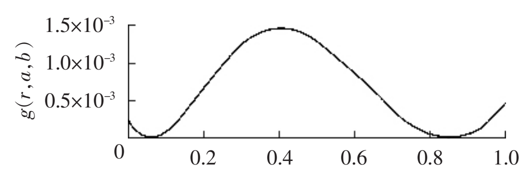

图 2 一次多项式拟合迭代初值算法的误相对误差曲线

Fig.2 Relative error curve using linear polynomial fitting algorithm with iterative initialvalue

$g'_r(r,a,b)=\dfrac{a(b-r)}{2\sqrt{1+r^2}}\left[\dfrac{1}{1+r^2}-\dfrac{1}{a^2(1+br)^2}\right]$,当 $r=b$ 时,$g(r,a,b)$ 取得极大值 $\dfrac{a^2(1+b^2)+1}{2a\sqrt{1+b^2}}-1$。在边界 $r=0$ 处,$g(r,a,b)=(a^2+1)/(2a)-1$;在边界 $r=1$ 处,$g(r,a,b)=\dfrac{a^2(1+b)^2+2}{2\sqrt{2}a(1+b)}-1$。要获得最小的相对误差,应有 $g(b,a,b)=g(0,a,b)=g(1,a,b)$,即满足:

$$\begin{cases}\dfrac{a^2(1+b^2)+1}{2a\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{a^2+1}{2a}\\ \dfrac{a^2(1+b)^2+2}{2\sqrt{2}a(1+b)}=\dfrac{a^2+1}{2a}\end{cases}$$

可得如下 3 组解:

$$\begin{cases}a_1=1/\sqrt[4]{1+(\sqrt{2}-1)^2}\\ b_1=\sqrt{2}-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_2=\sqrt[4]{2}\\ b_2=0\end{cases},\quad \begin{cases}a_3=1/\sqrt[4]{2}\\ b_3=1\end{cases}$$

取第1组解时,最大相对误差达到最小值,其值为$(a_1^2+1)/(2a_1)-1(\approx 0.0784\%)$。

4 算法评价及优势

对于$x=\sqrt{P}$形式的开方计算,工程上普遍采用的算法是将查表法和牛顿迭代法结合起来[9],即根据P值查表得到迭代初值,然后迭代2~3次得到计算结果。而这里提出的$x=\sqrt{P}$的计算方法无需查表,且第1次迭代无需除法运算,相对误差不超过1.5052%;进行第2次迭代后,相对误差不超过0.0112%。可见,该算法只进行一次除法运算就可以达到相当高的计算精度。

对于$x=\sqrt{L^2+S^2}$形式的开方计算,目前普遍采用的算法是$x=L+S/3$或$x=L+5S^2/(9L+3S)$。

$x=L+S/3$在$L=S$时相对误差最大,其值为5.7191%[10],而这里的一次多项式拟合算法的相对误差不超过3.9566%,2种算法相对误差曲线如图3所示,图中虚线为$f(L,S)=L+S/3$,实线为$f(L,S)=a(L+bS)$。

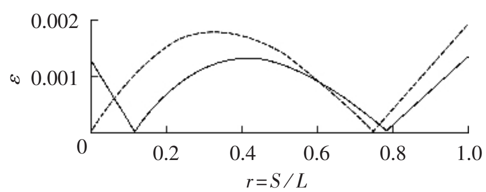

图3 $f(L,S)=L+S/3$和$f(L,S)=a(L+bS)$拟合的误差曲线

Fig.3 Relative error curves using $f(L,S)=L+S/3$ fitting and $f(L,S)=a(L+bS)$ fitting

$x=L+5S^2/(9L+3S)$本质上是$x_0=L+S/3$进行1次迭代计算后的结果。该算法在$L=S$时相对误差最大,其值为0.1735%。这里的一次多项式拟合迭代初值算法的相对误差不超过0.0784%,计算精度提高了1倍多,同样是一次除法运算,计算量基本相当。2种算法的相对误差曲线如图4所示,图中虚线为$f(L,S)=L+5S^2/(9L+3S)$,实线为$f(L,S)=a(L+bS)$。

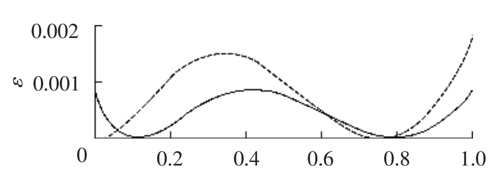

图4 $f(L,S)=L+5S^2/(9L+3S)$和$f(L,S)=a(L+bS)$迭代的拟合误差曲线

Fig.4 Relative error curves using $f(L,S)=L+5S^2/(9L+3S)$ and $f(L,S)=a(L+bS)$ iteration

该算法的计算精度已经可以满足工程计算的需要。由于牛顿迭代法用于开方计算是平方收敛的[4],若需要更高的计算精度,只需要再进行1次迭代即可达到可观的精度。

5 结语

在深入研究牛顿迭代算法应用于开方计算所具有的特征的基础上,本着计算相对误差小且尽量减少迭代次数和除法运算次数的原则来确定迭代初值或拟合参数。针对2种不同形式的开方计算给出了具体的计算步骤以及相对误差的情况。

理论分析表明,所提出的算法比目前普遍采用的开方算法在精度上有明显的提高,应用该算法可以提升微机保护测控装置的计算精度和计算速度,有很好的应用推广价值。浮点数的牛顿迭代开方计算同样面临迭代初值的选取问题,因此,虽然本文是针对定点数进行讨论,但其算法思想及相关结论对于浮点数的开方计算同样具有指导意义。

参考文献

[1] 杨奇逊,黄少锋. 微型机继电保护基础[M]. 2版. 北京:中国电力出版社,2005.

[2] 王梅义. 电网继电保护应用[M]. 北京:中国电力出版社,1999.

[3] 杨汉生. 求相量幅值的一种较精确快速算法[J]. 巢湖学院学报,2003,5(3):48-50.
YANG Han-sheng. A method with better accuracy and speed for calculating the amplitude of phase[J]. Journal of Chaohu College,2003,3(5):48-50.

[4] 杨鹏,史旺旺. 微机测量中数据表示与开平方算法的改进[J]. 扬州大学学报:自然科学版,2003,3(2):63-65.
YANG Peng,SHI Wang-wang. Study on square root algorithm in microcomputer based test[J]. Journal of Yangzhou University:Natural Science Edition,2003,3(2):63-65.

[5]《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社,1979.

[6] 袁慰平,张令敏,黄新芹,等. 数值分析[M]. 南京:东南大学出版社,1992.

[7] 刘红超,陈慧汝. 用迭代法计算预定精度下的算术平方根[J]. 黄冈师范学院学报,2004,24(3):24-26.
LIU Hong-chao,CHEN Hui-ru. Using iteration to calculate square root with given accuracy[J]. Journal of Huanggang Normal University,2004,24(3):24-26.

[8] 姜永春,王泽兰,李国财. 一种最优的快速开方算法[J]. 煤炭技术,2004,23(9):109-111.
JIANG Yong-chun,WANG Ze-lan,LI Guo-cai. Best quick arithmetic of square[J]. Coal Technology,2004,23(9):109-111.

[9] 周大敏. 电量变送器中开平方算法的研究[J]. 继电器,1996,24(3):30-34.
ZHOU Da-min. Study on the algorithm of square root in electrical quantity transducer[J]. Relay,1996,24(3):30-34.

[10] 陈德树. 计算机继电保护原理与技术[M]. 北京:中国电力出版社,1992.

(责任编辑:李 玲)

作者简介:

姚 斌(1977-),男,黑龙江宁安人,硕士,研究方向为电力系统故障分析、微机继电保护算法研究及保护装置的开发(**E-mail**:yaobin@sf-auto.com);

陈玉涛(1978-),男,天津人,工程师,主要从事电力系统调度运行及生产管理等工作(**E-mail**:chenyutao@eyou.com);

李静正(1966-),男,山西太原人,高级工程师,主要从事电力系统微机继电保护及变电站综合自动化的研究开发及管理工作(**E-mail**:lijingzheng@sf-auto.com)。

Fixed-point square root algorithm for microprocessor-based protection and monitoring devices

YAO Bin[1], CHEN Yu-tao[2], LI Jing-zheng[1]
(1. Beijing Sifang Automation Co., Ltd., Beijing 100085, China;
2. Tianjin Electric Power Company, Tianjin 300010, China)

Abstract: Square root calculation is very normal in microprocessor-based protection and monitoring devices, and its speed and precision influence device performance directly. Selecting proper initial value is the key in application of Newton iteration. The characteristics of Newton iteration method used in square root calculation is analyzed, based on which the way to select the proper initial value is proposed for two kinds of faster and more precise square root calculation. For the integers, the initial value is set according to its binary bit number; for the magnitude of complex, the initial value is set according to its real and imaginary parts. The proposed algorithm is simpler (at most one division operation) and more precise than the classical square root calculations. Though the proposed square root algorithm is discussed for fixed-point number (integer), its concept and the way of initial value selection is useful for floating-point number.

Key words: square root; Newton iteration method; initial value; relative error