应用三次样条函数快速计算插值FFT算法

孙同明[1],许 珉[2],杨育霞[2]

(1. 河南工业大学 国际学院,河南 郑州 450052;
2. 郑州大学 电气工程学院,河南 郑州 450002)

摘要：加汉宁窗插值快速傅里叶变换(FFT)算法可以克服频谱泄漏的影响,消除用异步采样值测量电量时产生的误差,但其计算量较大,实时性较差。为了减小插值 FFT 算法的计算量,采用三次样条函数逼近加汉宁窗插值 FFT 算法函数,提出了应用三次样条函数的有效形式计算插值 FFT 算法,将插值 FFT 算法的谐波幅值修正系数曲线分为 10 段,给定 11 个等间距插值点,构造出计算插值 FFT 算法的三次样条函数的快速计算公式。该公式简单,程序实现方便,计算量小,在分段处连续,且为精确值,可以大幅度提高插值 FFT 算法的计算速度和实时性。仿真计算结果表明,应用三次样条函数的有效形式计算电量谐波幅值和频率,幅值误差小于 0.1 %,频率误差小于 0.01 Hz。

关键词：三次样条函数；异步采样；频谱泄漏；插值 FFT 算法

中图分类号：TM 930.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-6047(2007)06-0060-03

用快速傅里叶变换(FFT)计算周期信号必须截断,取 1 个或多个整周期,这必然产生频谱泄漏[1-2]。当进行电量测量时,如果采样频率不等于基波频率的整倍数,计算得到的是泄漏的频谱(栅栏效应),得不到信号的精确值,计算存在误差。实际电网频率通常总会在额定频率(我国为 50 Hz)附近波动,解决这个问题的方法有:采用硬件锁相环电路产生采样周期实现同步采样;测频调整定时采样时间常数实现同步采样;采用插值 FFT 算法[1,3-6]和其他改进算法[7-9]。但对于频率快速变化的信号,前 2 种方法不能及时跟踪,从而不能实现真正意义上的同步采样[10]。在插值 FFT 的计算中,需要计算三角函数,要获得比较高的精度,计算量较大。现采用三次样条函数的有效形式计算插值 FFT[11-12]函数,计算量小,实时性好,在分段处连续,且为精确值,有效地提高了插值 FFT 算法的计算速度。

1 计算方法

1.1 插值 FFT 算法[11]

采用插值 FFT 算法,利用泄漏的谱线计算实际的电压、电流向量,可以消除异步采样的影响,直接插值 FFT 算法由于频谱泄漏的原因,误差较大,加窗插值 FFT 算法可以得到较高的精度。为减小频谱泄漏的影响,可选择主瓣包含更多的能量而无旁瓣的汉宁窗函数,当 $N\gg1$ 时,其离散形式为

$$w_{\mathrm{H}}(n)=0.5[1-\cos(2\pi n/N)]R_N(n)$$

离散信号加汉宁窗在频域进行更简单,即

$$U_{\mathrm{H}}(k)=0.5\{U(k)-0.5[U(k+1)+U(k-1)]\}$$

加汉宁窗的插值 FFT 算法的 l 次谐波幅值和相位的估计式为

$$U_{\mathrm{m}}=2\pi r(1-r^2)U_{\mathrm{H}}(l)\mathrm{e}^{-r\pi}/\sin(r\pi)$$

$$\varphi_{\mathrm{m}}=\mathrm{angle}(U_{\mathrm{H}}(l))-r\pi$$

由加汉宁窗后的频谱比值得:

$$\alpha=\frac{|U_{\mathrm{H}}(l)|}{|U_{\mathrm{H}}(l+1)|}=\frac{|r-2|}{|r+1|}=\frac{2-r}{r+1}$$

则

$$r=(2-\alpha)/(\alpha+1)$$

当实际谱线靠近 $U_{\mathrm{H}}(l)$ 时,$\alpha=2$,当实际谱线靠近 $U_{\mathrm{H}}(l+1)$ 时,$\alpha=0.5$,r 的变化范围为 $0\leqslant r\leqslant1$。此方法计算精度高、范围宽,还可以得到频率,但计算量较大,在 $r=0$ 和 $r=1$ 附近为极限值。

1.2 用三次样条函数快速计算插值 FFT 算法

三次样条插值函数[13]从数学上看,是一条近似于分段的三次多项式,但在分段处函数是连续的,它的一阶和二阶导数也是连续的。给定插值点 (t_i,y_i),$i=0,1,\cdots,n$。在 $[t_i,t_{i+1}]$ 上三次样条函数为

$$S_i(x)=\frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1}-x)^3+\frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-t_i)^3+\left(\frac{y_{i-1}}{h_i}-\frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x-t_i)+\left(\frac{y_i}{h_i}-\frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1}-x)$$

式中 $h_i=t_{i+1}-t_i$。

由三次样条函数导数的连续性条件可以确定 z_i。按上式计算,计算量仍较大,若用 h_i+t_i 替换 t_{i+1},并进行整理可得三次样条函数有效的嵌套形式为

$$S_i(x)=y_i+(x-t_i)\{C_i+(x-t_i)[B_i+(x-t_i)A_i]\}$$

$$A_i=(z_{i+1}-z_i)/(6h_i),\quad B_i=z_i/2$$

$$C_i=-h_i z_{i+1}/6-h_i z_i/3+(y_{i+1}-y_i)/h_i$$

A_i、B_i 和 C_i 为常数,可离线算出,故按上式计算三次样条函数时,只需 3 次乘法、4 次加减法,计算速度较快,此有效形式用于函数逼近有很大的优势。

插值 FFT 算法的谐波幅值修正系数为

$$|2\pi r(1-r^2)/\sin(r\pi)|$$

收稿日期:2006-10-24;修回日期:2007-01-19

计算它需要计算三角函数,实际应用中常采用级数代替三角函数,即

$$\left|\frac{2\pi r(1-r^2)}{r\pi-(r\pi)^3/3!+(r\pi)^5/5!-(r\pi)^7/7!+\cdots}\right|=$$
$$\left|\frac{2\pi(1-r^2)}{\pi-r^2\pi^3/3!+r^4\pi^5/5!-r^6\pi^7/7!+\cdots}\right|$$

按此式计算,计算量较大,虽消除了 $r=0$ 处的极限值,但 $r=1$ 处仍为极限值,且计算精度要求越高,计算量越大。用三次样条函数的有效形式计算该系数,计算公式简单,计算量小,且要提高计算精度,只需分段多一些,这并不影响计算速度。由于 Matlab 中的 spline 函数只能用于三次样条插值计算,不能构造三次样条函数,故采用自己编写的程序来构造三次样条函数。将插值 FFT 算法的谐波幅值修正系数曲线分为 10 段,给定 11 个等间距插值点,构造出计算插值 FFT 算法的三次样条函数的快速计算公式(对所有次谐波,公式都相同)为

$$S_0(r)=2+r\times[0.0741819412+r\times(r\times5.5304690218)]\qquad 0\leqslant r<0.1$$

$$S_1(r)=2.012948663+(r-0.1)\times\{0.2400960118+(r-0.1)\times[1.6591407065+(r-0.1)\times(-1.1477496316)]\}\qquad 0.1\leqslant r<0.2$$

$$S_2(r)=2.0524019217+(r-0.2)\times\{0.5374916642+(r-0.2)\times[1.314815817+(r-0.2)\times0.9400178092]\}\qquad 0.2\leqslant r<0.3$$

$$S_3(r)=2.120239264+(r-0.3)\times\{0.8286553619+(r-0.3)\times[1.5968211598+(r-0.3)\times0.7217589103]\}\qquad 0.3\leqslant r<0.4$$

$$S_4(r)=2.2197947708+(r-0.4)\times\{1.1696723612+(r-0.4)\times[1.8133488329+(r-0.4)\times1.299029691]\}\qquad 0.4\leqslant r<0.5$$

$$S_5(r)=2.356194525+(r-0.5)\times\{1.5713130185+(r-0.5)\times[2.2030577402+(r-0.5)\times1.55194356]\}\qquad 0.5\leqslant r<0.6$$

$$S_6(r)=2.5369083478+(r-0.6)\times\{2.0584828733+(r-0.6)\times[2.6686408082+(r-0.6)\times3.1776264745]\}\qquad 0.6\leqslant r<0.7$$

$$S_7(r)=2.772620669+(r-0.7)\times\{2.687539829+(r-0.7)\times[3.6219287506+(r-0.7)\times1.0091391667]\}\qquad 0.7\leqslant r<0.8$$

$$S_8(r)=3.078603079+(r-0.8)\times\{3.442199754+(r-0.8)\times[3.9246705006+(r-0.8)\times14.842064135]\}\qquad 0.8\leqslant r<0.9$$

$$S_9(r)=3.4769118238+(r-0.9)\times\{4.672395778+(r-0.9)\times[8.377289741+(r-0.9)\times(-27.924299137)]\}\qquad 0.9\leqslant r<1$$

2　仿真计算及分析

令仿真计算的电压信号为含有谐波分量的函数,即

$$u(t)=\sin(2\pi ft)+0.3\sin(6\pi ft)+0.2\sin(10\pi ft)$$

以固定频率 $f_s=1/(0.02\div32)=1\,600(\mathrm{Hz})$ 进行采样,采样间隔 $T_s=0.02/32(\mathrm{s})$,每个工频周期采样 32 点,用 256 点进行计算。计算结果如表 1 所示。

表 1　仿真计算结果

Tab.1　Simulative calculation results

f/Hz	f_{cal}/Hz	基波		3 次谐波		5 次谐波	
		U_m/p.u.	e/%	U_m/p.u.	e/%	U_m/p.u.	e/%
48.5	48.50000	1.000197	−0.049	0.300003	−0.01	0.199996	0.02
49	48.9999	0.99944	0.056	0.300003	−0.06	0.200006	−0.03
49.5	49.49991	1.00089	−0.089	0.300059	−0.019	0.199998	0.01
50	50	1.000000	0	0.300000	0	0.200000	0
50.5	50.50001	1.00024	−0.024	0.300017	−0.056	0.200004	−0.02
51	51.0007	0.99987	0.013	0.300001	−0.0033	0.199999	0.005
51.5	51.50001	1.000041	−0.0041	0.300024	−0.008	0.200002	−0.01

注:f 为频率;f_{cal} 为频率计算值;U_m 为幅值;e 为误差。

从计算结果可以看出,频率误差小于 0.01 Hz,信号幅值误差小于 0.1 %,具有较高的精度。增加插值点还可以进一步提高计算精度,也可以在误差大的区段增加插值点来提高计算精度(以减少分段数量)。

3　结论

提出用三次样条函数的有效形式计算插值 FFT 函数,计算公式简单,程序实现方便,计算速度快,提高了实时性,在分段处连续,且为精确值,不存在极限值问题,适合于电力系统谐波和间谐波的高精度测量。经过仿真计算表明该方法不仅计算速度快,而且有较高的精度。可用于采用插值 FFT 算法的电力系统远动,继电保护测量装置或电量表计中,提高测量装置的实时性,也可以用于其他领域中,具有实用价值。

参考文献:

[1] 祁才君. 数字信号处理技术的算法分析与应用[M]. 北京:机械工业出版社,2005.

[2] 丁玉美,高西全. 数字信号处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2001.

[3] JAIN V K,COLLINS W L. High - accuracy analog measurements via interpolated FFT[J]. IEEE Trans IM,1979,28(2):113 - 122.

[4] TOMAS G. Interpolation algorithms for discrete fourier transform of weighed signals[J]. IEEE Trans IM,1983,32(2):350 - 355.

[5] 潘文,钱俞寿,周鹗. 基于加窗差值 FFT 的电力谐波测量理论(I)窗函数研究[J]. 电工技术学报,1994,9(1):50 - 54.

PAN Wen,QIAN Yu - shou,ZHOU E. Power harmonics mea - surement based on windows and interpolated FFT(I) study of windows[J]. Transactions of China Electrotechnical Society,1994,9(1):50 - 54.

[6] 潘文,钱俞寿,周鹗. 基于加窗差值 FFT 的电力谐波测量理论(Ⅱ)双插值 FFT 理论[J]. 电工技术学报,1994,9(2):53 - 56.

PAN Wen,QIAN Yu - shou,ZHOU E. Power harmonics mea - surement based on windows and interpolated FFT(Ⅱ) dual - interpolated FFT algorithms[J]. Transactions of China Elec - trotechnical Society,1994,9(2):53 - 56.

[7] 赵文春,马伟明,胡安. 电机测试中谐波分析的高精度 FFT 算法[J]. 中国电机工程学报,2001,21(12):83 - 87.

ZHAO Wen - chun,MA Wei - ming,HU An. FFT algorithm with high accuracy for harmonic analysis in the electric machine[J].

Proceedings of the CSEE,2001,21(12):83-87.
[8] 薛蕙,杨仁刚. 基于 FFT 的高精度谐波检测算法[J]. 中国电机工程学报,2002,22(12):106-110.
XUE Hui,YANG Ren-gang. Precise algorithms for harmonic analysis based on FFT algorithm[J]. Proceedings of the CSEE,2002,22(12):106-110.
[9] 庞浩,李东霞,俎云霄,等. 应用 FFT 进行电力系统谐波分析的改进算法[J]. 中国电机工程学报,2003,23(6):50-54.
PANG Hao,LI Dong-xia,ZU Yun-xiao,et al. An improved algorithm for harmonic analysis of power system using FFT technique[J]. Proceedings of the CSEE,2003,23(6):50-54.
[10] 祁才君,陈隆道,王小海. 应用插值 FFT 算法精确估计电网谐波参数[J]. 浙江大学学报:工学版,2003,37(1):112-116.
QI Cai-jun,CHEN Long-dao,WANG Xiao-hai. High-accuracy estimation of electrical harmonic parameters by using the interpolated FFT algorithm[J]. Journal of Zhejiang University:Engineering Science,2003,37(1):112-116.
[11] 张伏生,耿中行,葛耀中. 电力系统谐波分析的高精度 FFT 算法[J]. 中国电机工程学报,1999,19(3):63-66.
ZHANG Fu-sheng,GENG Zhong-xing,GE Yao-zhong. FFT algorithm with high accuracy for harmonic analysis in power system[J]. Proceedings of the CSEE,1999,19(3):63-66.
[12] 许珉,张鸿博. 基于异步顺序采样值精确测量电量的方法[J]. 继电器,2005,33(15):82-85.
XU Min,ZHANG Hong-bo. Approach for the accurate measurement of electrical quantity based on asynchronous sequential sampling[J]. Relay,2005,33(15):82-85.
[13] KINCAID D,CHENEY W. 数值分析[M]. 王国荣,俞耀明,徐兆亮,译. 北京:机械工业出版社,2005.
[14] 祁才君,王小海. 基于插值 FFT 算法的间谐波参数估计[J]. 电工技术学报,2003,18(1):92-95.
QI Cai-jun,WANG Xiao-hai. Interharmonics estimation based on interpolation FFT algorithm[J]. Transactions of China Electrotechnical Society,2003,18(1):92-95.
[15] 肖雁鸿,毛筱,周靖林,等. 电力系统谐波测量方法综述[J]. 电网技术,2002,26(6):61-64.
XIAO Yan-hong,MAO Xiao,ZHOU Jing-lin,et al. A survey on measuring method for harmonics in power system[J]. Power System Technology,2002,26(6):61-64.

(责任编辑:李育燕)

作者简介:

孙同明(1953-),男,安徽界首人,副教授,从事电磁场研究和大学物理教学工作(**E-mail**:stm@haut.edu.cn);

许 珉(1956-),男,河南开封人,教授,从事电气设备故障诊断及数字信号处理等方面的研究(**E-mail**:xumin@zzu.edu.cn)。

Fast calculation of interpolated FFT algorithm using cubic spline function

SUN Tong-ming[1],XU Min[2],YANG Yu-xia[2]

(1. International College, Henan University of Technology,Zhengzhou 450052,China;
2. College of Electric Engineering, Zhengzhou University,Zhengzhou 450002,China)

Abstract: Hanning window interpolated FFT(Fast Fourier Transform) algorithm can overcome the influence of frequency spectrum leakage and eliminate the errors brought by using asynchronous sampling values in electrical parameter measurement, but it needs a large number of computations and has bad real-time performance. In order to reduce its computations, the cubic spline function is adopted to approach Hanning window interpolated FFT algorithm function,the effective form of cubic spline function is put forward to calculate the interpolated FFT algorithm. The harmonic amplitude modification coefficient curve is divided into 10 parts and 11 interpolation points with equal intervals are given to form the fast calculation formula using cubic spline function for Hanning window interpolated FFT algorithm. It is simple and easy to be programmed with less calculations and precise continuous values at interpolation points,and the speed of interpolated FFT algorithm is improved strongly. Simulative calculation results show that,the power harmonic amplitude and frequency calculation using the effective form of cubic spline function has the amplitude error less than 0.1 % and the frequency error less than 0.01 Hz.

Key words: cubic spline function; asynchronous sampling; spectrum leakage; interpolated FFT algorithm

菲尼克斯电子接口与自动化产品电力行业应用研讨会在宁召开

2007 年 4 月 19 日,菲尼克斯电子接口与自动化产品电力行业应用研讨会在南京江宁区菲尼克斯国际会议中心隆重召开,来自南京周边的设计院、系统集成商、终端用户、分销商、高(职)校的工程技术人员 60 多人参加了会议,并与菲尼克斯的产品和技术专家们进行了深入的研讨交流。会议上,东南大学博士研究生导师林中达教授作了全球自动化发展形势的专题演讲,菲尼克斯产品经理孙林宝先生等人分别就自动化、电子接口、防雷与电涌保护以及创新型端子等产品和应用方案进行了专题介绍,菲尼克斯行业经理汪和胜先生、缪善从先生以及各产品经理与参会代表就产品技术、应用方案、市场定位等方面进行了深入交流。与会代表还参观了菲尼克斯(中国)生产制造中心和演示设备。

菲尼克斯的电子接口产品 Interface 为整个控制系统提供了开关量、模拟量和串行量等信号之间的匹配,同时提供三大系列的开关稳压电源,通过这些接口模块实现转换、开关、隔离、适配、放大、连接和供电等功能,这些高品质的产品为整个工业控制领域提供较为完备的输入输出接口解决方案。带管理功能的模块化交换机、工业以太网千兆交换机、无线局域网、无线 I/O 等自动化产品以及开放灵活的 PrfiNet 解决方案已经将菲尼克斯从单一电连接制造厂发展到全面工业自动化解决方案的供应商。本次研讨会就是为深化菲尼克斯经营理念的核心,即“与客户共同开发新产品和新的系统解决方案”的目标而举办的,通过客户与专家们的面对面研讨和交流,以满足客户不断更新的自动化需求。

(王 虹)