

一种 FIR 高阶多通带数字滤波器的优化设计方法

李 颢, 安伟科

(湖南理工学院 机电系, 湖南 岳阳 414000)

摘要: 为有效提高有限冲激响应 FIR(Finite Impulse Response)高阶数字滤波器优化设计速度和精度, 根据 FIR 线性相位滤波器的幅频特性, 提出了一种基于激励矩阵为 $\mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W}$ 的神经网络算法。该算法的主要思想是用神经网络算法优化设计的 FIR 滤波器的幅频特性与理想滤波器的幅频特性在整个通带和阻带范围内的误差平方和为最小, 算法不涉及逆矩阵运算。为了保证该算法的收敛性, 提出并证明了神经网络算法的收敛性定理, 为神经网络学习率的选择提供了理论依据。该算法的主要特点是可实现样本集数据的并行训练, 有效提高了计算速度。为了验证该算法的有效性, 给出了多通带 FIR 高阶数字滤波器优化设计实例, 仿真结果表明了该算法具有高的计算精度和快的计算速度。

关键词: 神经网络; FIR 高阶数字滤波器; 优化设计

中图分类号: TN 713

文献标识码: B

文章编号: 1006-6047(2007)08-0066-03

有限冲激响应 FIR(Finite Impulse Response)滤波器常用的设计方法主要有窗口法和频率取样法, 这 2 种方法均不易精确控制通带和阻带的边界频率 ω_p 和 ω_r , 在实际应用中都存在一定局限性。国内外许多学者提出了一些优化设计方法, 如加权最小平方(WLS)算法^[1-3]。其中, 最著名的方法是利用最大误差最小化准则的雷米兹(Remez)交换算法与线性规划算法^[4]。这种算法需要计算一个矩阵的逆, 这个矩阵的阶数就是滤波器的独立系数。当滤波器的阶数很高时, 这个矩阵的求逆将会出现困难。为解决求矩阵逆的困难, 进一步改善 FIR 数字滤波器的设计精度, 因而发展了一些优化算法, 如递归最小平方(RLS)算法^[5-6]和随机抽样递归最小平方(RS-RLS)算法^[7]。RS-RLS 算法不涉及矩阵逆运算, 但误差加权函数凭经验确定, 而且没有明显改善滤波器的设计精度。之后出现了 FIR 数字滤波器的神经网络设计算法^[8-14], 算法有效避免了求矩阵逆的问题, 取得了良好效果, 该方法是串行计算方法, 且计算量较大。

这里提出了一种基于激励矩阵 $\mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W}$ 的神经网络算法。

1 FIR 线性相位滤波器的幅频特性

对于 $N-1$ 阶的 I 型 FIR 滤波器, 其系统函数可以表示为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (1)$$

$H(z)$ 是 FIR 滤波器的系统函数, $h(n)$ 是脉冲响

应, N 是脉冲响应长度。如果 N 为奇数, 而且脉冲响应 $h(n)$ 满足偶对称条件:

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (2)$$

那么, FIR 滤波器的幅频响应特性可表示为

$$\hat{H}(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} w_n \cos(n\omega) \quad (3)$$

$\hat{H}(\omega)$ 是 FIR 线性相位滤波器的幅频响应, 且

$$\begin{aligned} w_0 &= h\left(\frac{N-1}{2}\right) \\ w_n &= 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \\ n &= 1, 2, \dots, (N-1)/2 \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)是 I 型 FIR 线性相位滤波器的幅频响应。从式(3)可知, FIR 线性相位滤波器的幅频响应是傅里叶级数, w_n 是傅里叶系数。一旦获得 w_n , 就可以通过式(4)获得 $h(n)$, 即 $h[(N-1)/2] = w_0$, $h[(N-1)/2 - n] = w_n/2$, 这里 $n = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ 。考虑到式(2)的偶对称条件, 就可以设计出 FIR 线性相位滤波器, 即 $h(n)$, 这里 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。很显然, 为了设计 FIR 线性相位滤波器, 必须首先获得 w_n 。下面讨论基于激励矩阵 $\mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W}$ 的神经网络算法, 以便得到权值 w_n 。

2 神经网络算法描述

2.1 神经网络算法模型

设

$$\mathbf{W} = [w_0, w_1, \dots, w_{(N-1)/2}]^T$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{(N-1)/2}]^T$$

$$\hat{\mathbf{H}} = [\hat{H}(\omega_0), \hat{H}(\omega_1), \dots, \hat{H}(\omega_{(N-1)/2})]^T$$

以及

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos \omega_0 & \cos \omega_1 & \cdots & \cos \omega_{(N-1)/2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(a\omega_0) & \cos(a\omega_1) & \cdots & \cos[a\omega_{(N-1)/2}] \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$a = (N-1)/2$$

这里 $\omega_l = 2\pi l / (N-1)$, $l = 0, 1, \dots, (N-1)/2$, 则式(3)可以表示为

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{C}^T \mathbf{W} \quad (6)$$

设

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W} = 0 \quad (7)$$

其中 $\mathbf{H}_d$ 是 FIR 理想滤波器的幅频响应向量, 图 1 显示了基于激励矩阵 $\mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W}$ 的神经网络算法模型, 则神经网络输出为

$$\mathbf{F}^k = \mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W}^k \quad (8)$$

$\mathbf{F}^k$ 是神经网络输出向量, $\mathbf{H}_d$ 是 FIR 理想滤波器的幅频响应向量, $\mathbf{W}^k$ 是神经网络权值向量, $\mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W}$ 是神经网络隐层单元的激励矩阵。

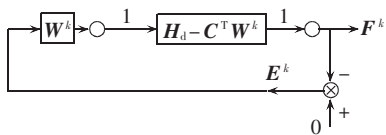


图 1 神经网络模型

Fig.1 Model of neural network

定义性能指标 J 如下:

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^k\|^2 \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{E}^k = 0 - \mathbf{F}^k = -\mathbf{F}^k \quad (10)$$

$\mathbf{E}^k$ 是神经网络理想输出与实际输出的误差向量, 零向量是神经网络理想输出, $\|\mathbf{E}^k\|^2$ 是欧氏 (Euclidean) 范数的平方。为了使性能指标 J 为最小, 可以用梯度下降法对权值向量 $\mathbf{W}^k$ 进行调整:

$$\mathbf{W}^{k+1} = \mathbf{W}^k - \eta \frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^k} \quad (11)$$

$\eta > 0$ 是学习率。由式(8)(9)(10)可得:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^k} = \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial \mathbf{W}^k} \frac{\partial \mathbf{E}^k}{\partial \mathbf{F}^k} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}^k} = \mathbf{C} \mathbf{E}^k \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)得权向量调整公式:

$$\mathbf{W}^{k+1} = \mathbf{W}^k - \eta \mathbf{C} \mathbf{E}^k \quad (13)$$

由以上分析可知, 式(6)中傅里叶系数向量 $\mathbf{W}$ 就是式(8)中的神经网络权向量 $\mathbf{W}^k$ 。只要对 FIR 理想滤波器的幅频响应向量 $\mathbf{H}_d$ 进行训练以获取神经网络权向量 $\mathbf{W}^k$, 就可以设计出具有线性相位的 FIR 数字滤波器。

2.2 神经网络算法收敛性条件

众所周知, 学习率的大小对神经网络算法收敛性有重要影响, 若太小, 会使算法的收敛速度很慢, 增加了计算量; 若太大, 又可能会使算法出现振荡现象而无法收敛。为了确定学习率的合适范围, 下面给出了学习率的选择定理。

定理: 只有当学习率为 $0 < \eta < 2 / \|\mathbf{C}\|^2$ 时, 神经网络算法是收敛的, 这里 η 是学习率, $\mathbf{C}$ 是由式(5)

构造的矩阵。

证明: 取 Lyapunov 函数为

$$V_k = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^k\|^2 \quad (14)$$

则有

$$\Delta V_k = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^k\|^2 \quad (15)$$

因为 $\mathbf{E}^{k+1} = \mathbf{E}^k + \Delta \mathbf{E}^k = \mathbf{E}^k + \frac{d\mathbf{E}^k}{d\mathbf{W}^k} \Delta \mathbf{W}^k$, 且 $\Delta \mathbf{W}^k =$

$-\eta \frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^k} = -\eta \mathbf{C} \mathbf{E}^k$, $\frac{d\mathbf{E}^k}{d\mathbf{W}^k} = \mathbf{C}$, 于是有

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^k - \eta \mathbf{C}^2 \mathbf{E}^k\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^k\|^2 \leq \\ &\frac{1}{2} \|\mathbf{I} - \eta \mathbf{C}^2\|^2 \|\mathbf{E}^k\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{E}^k\|^2 = \\ &\frac{1}{2} [\|\mathbf{I} - \eta \mathbf{C}^2\|^2 - 1] \|\mathbf{E}^k\|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

因为 $\|\mathbf{E}^k\|^2 > 0$, 若算法是收敛的, 则有 $\Delta V_k < 0$, 由式(16)很容易得到:

$$\|\mathbf{I} - \eta \mathbf{C}^2\|^2 < 1 \quad (17)$$

其中, $\mathbf{I}$ 是单位矩阵。又因为 $\|\mathbf{I} - \eta \mathbf{C}^2\|^2 \geq (1 - \eta \|\mathbf{C}\|^2)^2$, 考虑到 $\eta > 0$, $\|\mathbf{C}\|^2 > 0$, 根据式(18), 则有 $(1 - \eta \|\mathbf{C}\|^2)^2 < 1$, 即 $0 < \eta < 2 / \|\mathbf{C}\|^2$ 。

很显然, 如果学习率 η 满足条件: $0 < \eta < 2 / \|\mathbf{C}\|^2$, 则由式(16)有 $\Delta V_k < 0$, 因此, 本文算法是收敛的。

关于神经网络算法的训练步骤, 类似参考文献 [15], 限于篇幅在此不再叙述。

3 FIR 线性相位滤波器优化设计实例

在本节给出了 2 个仿真实例, 其目的是检验文中已证明的神经网络算法收敛性理论, 并验证基于激励矩阵为 $\mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W}$ 的神经网络算法在 FIR 线性相位滤波器优化设计领域的有效性。

3.1 设计算例 1

已知某理想 I 型 FIR 三通带滤波器的幅频特性为

$$|\mathbf{H}_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0.5 < |\omega| < 1.0, 1.5 < |\omega| < 2.0, \\ 1 & 2.5 < |\omega| < 3.0 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

要求设计一个 500 阶的 FIR 三通带滤波器, 则对 ω 在 $[0, \pi]$ 范围内均匀采样, 共 251 个样本数据, 即: $\omega_l = \pi l / 250$, $l = 0, 1, 2, \dots, 250$ 。为了使通带范围内无过冲、无波动, 在每个过渡带内分别取 2 个样本点 0.78 和 0.25, 因此, 实际的训练样本向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d &= [\text{zeros}(1, 38), 0.25, 0.78, \\ &\quad \text{ones}(1, 40), 0.78, 0.25, \\ &\quad \text{zeros}(1, 36), 0.25, 0.78, \\ &\quad \text{ones}(1, 40), 0.78, 0.25, \\ &\quad \text{zeros}(1, 36), 0.25, 0.78, \\ &\quad \text{ones}(1, 40), 0.78, 0.25, \text{zeros}(1, 9)] \end{aligned}$$

随机产生长度为 251 的权向量 $\mathbf{W}$, 给定无穷小正实数 $T_{ol} = 10^{-7}$, 用式(5)构造矩阵 $\mathbf{C}$, 计算学习率 $\eta = 1.35 / \|\mathbf{C}\|^2$ 。经过 13 次神经网络训练, 可得到

误差平方和即性能指标为 $J=2.083 \times 10^{-8}$, 图 2 显示了 500 阶 FIR 三通带线性相位滤波器的幅频响应特性。

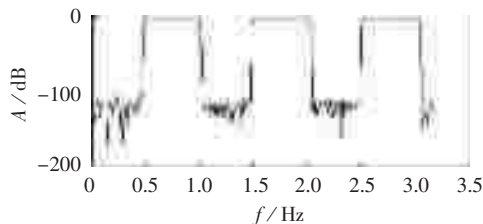


图 2 例 1 幅频响应特性

Fig.2 Exam.1 magnitude response of simulation

3.2 设计算例 2

同算例 1, 要求设计一个 1000 阶的 FIR 三通带滤波器, 则对 ω 在 $[0, \pi]$ 范围内均匀采样, 共 501 个样本数据, 即: $\omega_l = \pi l / 500, l=0, 1, 2, \dots, 500$ 。为了使通带范围内无过冲、无波动, 在每个过渡带内分别取 2 个样本点 0.78 和 0.25, 因此, 实际的训练样本向量为

$$\begin{aligned} H_d = & [\text{zeros}(1, 78), 0.25, 0.78, \\ & \text{ones}(1, 79), 0.78, 0.25, \\ & \text{zeros}(1, 76), 0.25, 0.78, \\ & \text{ones}(1, 79), 0.78, 0.25, \\ & \text{zeros}(1, 76), 0.25, 0.78, \\ & \text{ones}(1, 79), 0.78, 0.25, \text{zeros}(1, 22)] \end{aligned}$$

随机产生长度为 501 的权向量 $\mathbf{W}$, 给定无穷小正实数 $T_{ol} = 10^{-15}$, 则经过 24 次神经网络训练, 可得到误差平方和即性能指标为 $J=2.061 \times 10^{-16}$, 图 3 显示了 1000 阶 FIR 三通带线性相位滤波器的幅频响应特性。

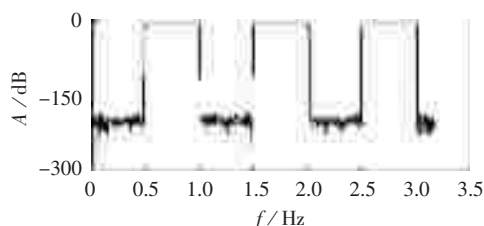


图 3 例 2 幅频响应特性

Fig.3 Exam.2 magnitude response of simulation

4 结论

提出了以 $H_d - C^T \mathbf{W}$ 为激励矩阵的神经网络算法。给出了高阶 FIR 线性相位滤波器的优化设计实例。该方法的主要思想是通过训练神经网络权向量 $\mathbf{W}$ 来获得 FIR 数字滤波器的脉冲响应。由于该方法不涉及矩阵的逆运算, 因此为高阶 FIR 线性相位滤波器的优化设计提供了一种有效的并行计算方法。由以上仿真实例可以看出, 通带平滑、无波纹、无过冲, 阻带衰耗大。具有相同量级的计算精度、并行算法, 很显然, 本方法的计算量更小、计算速度更快。

参考文献:

[1] 姜睿, 罗贵明. 基于加权最小二乘法的最优适应控制器[J]. 自动化学报, 2006, 32(1): 140-147.

JIANG Rui, LUO Gui-ming. Optimal adaptive controller for stochastic systems based on weighted least-squares algorithm[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(1): 140-147.

[2] LIM Y C, LEE J H, CHEN C K, et al. A weight least squares algorithm for quasi-equiripple FIR and IIR digital filter design[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1992, 40(3): 551-558.

[3] LEE J H, CHEN C K, LIM Y C. Design of discrete coefficient FIR digital filters with arbitrary amplitude and phase responses[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1993, 40(7): 444-448.

[4] 吴湘淇. 信号、系统与信号处理[M]. 北京: 电子工业出版社, 1996.

[5] GOODWIN G C, SIN K S. Adaptive filtering prediction and control[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1984.

[6] LJUNG L, SODERSTROM T. Theory and practice of recursive identification[M]. Massachusetts: The MIT Press, 1983.

[7] 赖晓平. FIR 数字滤波器的递推最小二乘设计算法[J]. 信号处理, 1999, 15(3): 260-264.

LAI Xiao-ping. A random sampling recursive least-squares approach to the design of FIR digital filters[J]. Signal Processing, 1999, 15(3): 260-264.

[8] ZHAO Hui, YU Jue-bang. A novel neural network-based approach for designing digital filter[C] // Proc ISCAS'97/IEEE. Hong Kong: IEEE, 1997: 2272-2275.

[9] ZHAO Hui, YU Jue-bang. A novel neural network-based approach for designing 2-D FIR filters[J]. IEEE Trans on CASII, 1997, 44(11): 1095-1099.

[10] 王炎, 廖晓峰, 虞厥邦. FIR 数字滤波器设计的复数神经网络方法[J]. 信号处理, 1999, 15(3): 193-198.

WANG Yan, LIAO Xiao-feng, YU Jue-bang. Complex neural network on designing FIR digital filter[J]. Signal Processing, 1999, 15(3): 193-198.

[11] 涂承媛, 涂承宇. 一种新的收敛于全局最优解的遗传算法[J]. 信息与控制, 2001, 30(2): 116-119, 138.

TU Cheng-yuan, TU Cheng-yu. A new genetic algorithm converging to the globally optimal solution[J]. Information and Control, 2001, 30(2): 116-119, 138.

[12] 王小华, 何怡刚, 曾喆昭. 神经网络在 4 型 FIR 滤波器的优化设计研究[J]. 电路与系统学报, 2003, 8(5): 97-100.

WANG Xiao-hua, HE Yi-gang, ZENG Zhe-zhao. Optimized design of the type-four FIR filter based on neural networks with sine basis functions[J]. Journal of Circuits and Systems, 2003, 8(5): 97-100.

[13] 曾喆昭, 唐忠. 神经网络在 FIR 带通滤波器中的应用研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2002, 16(2): 10-13.

ZENG Zhe-zhao, TANG Zhong. Application study of the neural networks in the FIR band-pass filters[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrument, 2002, 16(2): 10-13.

[14] 曾喆昭. 高阶 FIR 多带阻数字滤波器优化设计研究[J]. 长沙电力学院学报: 自然科学版, 2004, 19(3): 18-21.

ZENG Zhe-zhao. Study on optimal design of high-order FIR digital filter with multi-band stop[J]. Journal of Changsha University of Electric Power: Natural Science, 2004, 19(3): 18-21.

[15] 曾喆昭, 李仁发. 高阶多通带滤波器优化设计研究[J]. 电子学报, 2002, 30(1): 87-89.

ZENG Zhe-zhao, LI Ren-fa. Study the optimum design of the high-order multi-band-pass filters[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(1): 87-89.

(责任编辑: 柏英武)

作者简介:

李 锐(1963-), 男, 湖南岳阳人, 讲师, 硕士研究生, 研究方向为自动控制、信号处理(E-mail: largesi@163.com);

安伟科(1956-), 男, 湖南新化人, 教授, 博士, 研究方向为激光物理、信号处理。

Optimal design of high order multi-band-pass FIR digital filter

LI Si,AN Wei-ke

(Hunan Institute of Science & Technology, Yueyang 414000, China)

Abstract: To improve the design speed and precision of high - order FIR digital filter,a neural network algorithm based on the activation matrix is presented,which makes the square sum of amplitude-frequency response error between the designed FIR filter and the ideal filter least in the whole pass band and cut band. The invert matrix $\mathbf{H}_d - \mathbf{C}^T \mathbf{W}$ operation is not involved in the algorithm and its convergence theorem is presented and proved,which provides the theoretical basis for setting the learning rate of neural network. The sample data are trained in parallel to speed up the calculation. Examples of the optimal FIR digital filter design are given and the simulative results show its high precision and fast convergence rate.

This project is supported by the National Natural Science Foundation of Hunan(06JJ5011).

Key words: neural network; high-order FIR digital filter; optimal design