

奇异值分解结合均匀设计采样的半不变量法概率潮流计算

毛晓明, 叶嘉俊

(广东工业大学 自动化学院, 广东 广州 510006)

摘要:在样本形成过程中半不变量法概率潮流(PLF-CM)计算可能遇到输入变量相关系数矩阵非正定的情况,此时常用的 Cholesky 分解不再适用。提出一种奇异值分解(SVD)结合均匀设计采样(UDS)的 PLF-CM 计算方法。通过 SVD 和 UDS 结合 Nataf 变换得到考虑相关性的随机变量样本,借助这些样本计算常规数值方法难以求解的部分输入变量的半不变量,利用 SVD 处理输入变量的协方差矩阵以准确计算输出变量的半不变量,采用 Cornish-Fisher 级数展开求得输出变量的概率分布。以改造后的 IEEE 14 节点测试系统为算例,验证了所提方法的快速性、有效性及对高渗透率新能源发电的适应性。

关键词:电力系统;概率潮流;半不变量法;奇异值分解;均匀设计采样

中图分类号:TM 761

文献标志码:A

DOI:10.16081/j.issn.1006-6047.2019.06.023

0 引言

随着电力市场化改革及风、光等可再生能源发电的大规模并网,电力系统的随机性因素急剧增加。Borkowska 在 1974 年提出的概率潮流 PLF(Probabilistic Load Flow)分析方法可有效评估这些因素对电力系统运行的影响^[1],经过几十年的发展已形成模拟法^[2-4]、近似法^[5]和解析法^[6-8]3 类计算方法。

模拟法在采样后进行多次确定性潮流计算,再对计算结果进行统计处理得到问题的解,该方法计算精度高,但比较耗时。近似法计算简单、效率高,但在考虑相关性因素时计算复杂且误差较大。解析法先将非线性潮流方程线性化,再通过卷积运算得到输出随机变量的概率分布,计算简单,精度也能满足工程应用的要求^[9]。

应用最广泛的解析法是半不变量法概率潮流 PLF-CM(PLF based on Cumulant Method),当输入变量相互独立时,该方法以半不变量间简单的代数运算代替复杂的卷积运算,大幅提高了计算效率。针对 PLF-CM 在处理变量相关性问题上的固有缺陷,文献[6]提出一种解决方法,但是该方法计算复杂,很难在实际中应用。文献[7]提出基于蒙特卡洛抽样求解输入变量的半不变量,采用 Cholesky 分解处理输入变量的相关性,拓展了 PLF-CM 的应用范围。文献[8]进一步提出基于拉丁超立方抽样 LHS(Latin Hypercube Sampling)结合 Cholesky 分解的 PLF-CM 计算方法,并引入分段线性化潮流模型提高计算精度。但 Cholesky 分解仅适用于对称正定矩阵。实际工程应用中,常先估计随机变量两两间的相关系数,再将所有的相关系数组合成相关系数

矩阵。由于这些系数是彼此独立估计的,将它们组合在一起就可能出现相关系数矩阵非正定的情形^[3]。

本文提出奇异值分解 SVD(Singular Value Decomposition)结合均匀设计采样 UDS(Uniform Design Sampling)的随机样本生成方法,该方法具有较高的采样效率且可处理相关系数矩阵非正定的情形;在此基础上,采用半不变量法(CM)进行 PLF 计算,利用 SVD 处理输入变量的协方差矩阵,将具有相关性的输入变量转化为不相关变量,以准确计算输出变量的半不变量及概率统计特性;最后,通过 Cornish-Fisher 级数展开得到输出变量的概率分布特性。以改造后的 IEEE 14 节点测试系统为算例,验证了所提方法对高渗透率新能源发电的适应性。

1 基于 SVD 的 UDS

1.1 UDS

UDS 技术基于空间填充思想,通过较少的样本数据反映总体的分布信息。与 LHS 相比,UDS 的优势在于:覆盖同样大小的样本空间采样规模更小,具有更好的稳健性。这是因为 LHS 本质上是一种分层抽样技术,仍会出现采样点散布不均匀、分量间存在线性相关等情形^[10]。UDS 是 LHS 的一种重要改进,它是通过对均匀设计进行模 1 随机平移及在向量空间内随机取点而得到。设 d 为维数, n 为采样点数,则这种平移共有 n^d 个,而每组样本点数量为 n ,这样正好以同等机会抽到 n^d 个生成向量空间中的全体点,因此,UDS 是一种统计抽样^[10]。利用 UDS 产生样本的步骤如下。

a. 设 m 为随机变量的维数, N 为自然数的某个无穷子集,且 $m, n \in N$,选取均匀设计的生成向量 $(n; h_1, h_2, \dots, h_m)$,满足 $h_1 = 1, 1 < h_j < n (j = 2, 3, \dots, m)$,且对任意 $i \neq j$ 都有 $h_i \neq h_j$ 。

收稿日期:2018-06-28;修回日期:2019-03-10

基金项目:广东省自然科学基金资助项目(2014A030313509)

Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province(2014A030313509)

b. 从多项分布 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$ 中随机抽

取 m 个独立同分布样本 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m$ 。

c. 设 $V_{m \times n} = [v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_m]^T$ ($v_i = [v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in}]$), 且有:

$$v_{ij} = \left\{ \frac{j\eta_i + \eta_i - 0.5}{n} \right\} + \frac{w_{ij}}{n} \quad i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n \quad (1)$$

其中, $\{\cdot\}$ 表示取小数运算; w_{ij} 为取自 $[-0.5, 0.5]$ 上均匀分布的随机数, 其与 η_i 相互独立。

1.2 处理相关性的 SVD 方法

现有的 PLF-CM 方法都采用 Cholesky 分解处理多维输入变量 $X = [x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_m]^T$ 的相关性, 但 Cholesky 分解无法处理非正定或非满秩矩阵。任意矩阵均存在 SVD, 计算量与 Cholesky 分解相当^[11], 本文采用 SVD 处理输入变量的相关性。

SVD 指对于任意矩阵 A ($m \times n$ 阶), 存在列正交矩阵 U ($m \times n$ 阶) 和正交矩阵 G ($n \times n$ 阶), 使得:

$$A = USG^T \quad (2)$$

其中, $S = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, α_i 为矩阵 $A^T A$ 第 i 个特征值的非负平方根值。当矩阵 A 为对称矩阵时, 有 $U = G$ 。

SVD 具有性质 1^[2]: 设 Y 为 m 维独立标准正态分布向量, 矩阵 L 由向量 Z 的相关系数矩阵 ρ_Z 的 SVD 生成:

$$\rho_Z = U_{\rho_Z} S_{\rho_Z} U_{\rho_Z}^T = U_{\rho_Z} S_{\rho_Z}^{1/2} (U_{\rho_Z} S_{\rho_Z}^{1/2})^T = LL^T \quad (3)$$

其中, U_{ρ_Z} 为酉矩阵; S_{ρ_Z} 为 ρ_Z 的奇异值构成的对角矩阵, 且从大到小排列, 则由式(4)定义的 m 维向量 Z^* 的相关系数矩阵 $\rho_{Z^*} = \rho_Z$ 。性质 1 在相关性随机变量样本形成过程中有重要作用。

$$Z^* = \begin{bmatrix} z_1^* \\ \vdots \\ z_m^* \end{bmatrix} = LY = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

SVD 同时具有性质 2^[12]: 当输入变量 X 具有相关性时, 设 H 由 X 的协方差矩阵 C_X 的 SVD 生成, 即 $C_X = HH^T$ 。通过式(5), SVD 可将具有相关性的输入变量 X 转化为不相关变量 Y 。性质 2 在 PLF-CM 输出变量的半不变量计算过程中具有重要作用。

$$\begin{cases} Y = H^{-1}X \\ X = HY \end{cases} \quad (5)$$

本文证明如下:

$$\begin{aligned} C_Y &= E\{[Y - E(Y)][Y - E(Y)]^T\} = \\ E\{[H^{-1}X - H^{-1}E(X)][H^{-1}X - H^{-1}E(X)]^T\} &= \\ H^{-1}\{E[X - E(X)][X - E(X)]^T\}(H^{-1})^T &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^{-1}C_X(H^{-1})^T &= H^{-1}HH^T(H^{-1})^T = \\ (H^{-1}H)(H^{-1}H)^T &= I \end{aligned} \quad (6)$$

其中, E 表示数学期望; I 为单位矩阵。即变量 Y 的协方差矩阵 C_Y 为单位矩阵, 则其相关系数矩阵 ρ_Y 也必为单位矩阵。

1.3 相关性随机变量样本的生成

Nataf 变换可在已知输入变量边缘分布函数的条件下实现从原始空间到独立标准正态空间的变换, 具有精度高、计算简单等优点^[13], 本文借助它生成相关性随机变量样本。

设 m 维输入随机变量 $X = [x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_m]^T$ 的相关系数矩阵为 ρ_X , 随机变量 x_i 的累积分布函数 CDF (Cumulative Distribution Function) 及概率密度函数 PDF (Probability Density Function) 分别为 $F_i(x_i)$ 和 $f_i(x_i)$, 则可以通过式(7)所示等概率原则生成相关系数矩阵为 ρ_Z 的标准正态随机变量 $Z = [z_1, \cdots, z_i, \cdots, z_m]^T$ 。

$$\begin{cases} F_i(x_i) = \Phi(z_i) \\ z_i = \Phi^{-1}(F_i(x_i)) \end{cases} \quad i=1, 2, \cdots, m \quad (7)$$

其中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态变量的 CDF, $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为其反函数; $F_i(x_i)$ 及 $\Phi(z_i)$ 均为服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。

Nataf 变换中相关系数矩阵 ρ_X 和 ρ_Z 的非对角元素 $\rho_{x_{ij}}$ 和 $\rho_{z_{ij}}$ 满足式(8)^[13]。

$$\rho_{x_{ij}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{F_i^{-1}(\Phi(z_i)) - \mu_i}{\sigma_i} \frac{F_j^{-1}(\Phi(z_j)) - \mu_j}{\sigma_j} \times \varphi_{z_{ij}}(z_i, z_j, \rho_{z_{ij}}) \right] dz_i dz_j \quad (8)$$

其中, $\varphi(z_i, z_j, \rho_{z_{ij}})$ 为相关系数是 $\rho_{z_{ij}}$ 的标准二元正态分布的 PDF; $\mu_i, \mu_j, \sigma_i, \sigma_j$ 分别为变量 x_i, x_j 的期望和标准差。

式(8)的计算十分复杂, 文献[13]给出了相应的经验公式, 在已知 $\rho_{x_{ij}}$ 时可快速求得 $\rho_{z_{ij}}$ 。 ρ_Z 可能非正定或非满秩^[2], 此时其 Cholesky 分解不存在, 但 SVD 存在, 通过 $\rho_Z = LL^T$ 产生 L , 再由式(4)产生 Z^* , 最后可通过式(9)将 Z^* 转换为独立的标准正态随机变量 $Y = [y_1, \cdots, y_i, \cdots, y_m]^T$ 。

$$Y = L^{-1}Z^* \quad (9)$$

上述由 X 到 Y 的变换过程即为 Nataf 变换, 其逆过程可实现 Y 到 X 的变换:

$$\begin{cases} Z^* = LY \\ X = F^{-1}(\Phi(Z^*)) \end{cases} \quad (10)$$

综上, 利用 UDS 和 SVD 结合 Nataf 变换, 可快速获得服从指定分布且相关系数矩阵满足给定条件的输入随机变量样本 X , 步骤如下。

a. 由 UDS 产生相互独立的样本矩阵 $V_{m \times n} = [v_1, \dots, v_i, \dots, v_m]^T$ ($v_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}]$), 其中 v_i 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。

b. 通过式 (11) 将 $V_{m \times n}$ 转换为对应的独立正态分布样本矩阵 $Y_{m \times n} = [y_1, \dots, y_i, \dots, y_m]^T$ ($y_i = [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}]$)。

$$y_i = \Phi^{-1}(v_i) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

c. 为使所得输入变量样本的相关系数矩阵等于 $\rho_X \cdot \rho_Z$ 非对角元素修正为式 (12) [4]。

$$\rho_{zij} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \rho_{xij}\right) \quad (12)$$

d. 对 ρ_Z 进行 SVD $\rho_Z = LL^T$, 并通过式 (4) 得到 Z^* (利用了 SVD 的性质 1)。

e. 将 Z^* 中的样本代入式 (13), 得到具有相关性的随机变量 x_i 的样本 x_i^i 。

$$x_i^i = F_{x_i}^{-1}(\Phi(z_i^*)) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

2 PLF-CM 计算

2.1 潮流方程线性化

极坐标形式下交流系统的节点和支路功率方程可表示为:

$$\begin{cases} D = u(X) \\ E = g(X) \end{cases} \quad (14)$$

其中, X 为节点注入功率向量; D 为节点电压状态向量; E 为支路功率向量; u 和 g 分别为节点和支路功率函数。

将式 (14) 在基准运行点进行泰勒级数展开, 并略去高次项, 可得线性化潮流模型:

$$\begin{cases} D = u(X_0 + \Delta X) = D_0 + \Delta D = D_0 + S_0 \Delta X \\ E = g(X_0 + \Delta X) = E_0 + \Delta E = E_0 + T_0 \Delta X \end{cases} \quad (15)$$

其中, 下标 0 表示基准运行点; Δ 表示扰动; S_0 、 T_0 为灵敏度矩阵, $S_0 = J_0^{-1}$, $T_0 = G_0 S_0$, J_0 为雅可比矩阵, $G_0 = (\partial E / \partial X) |_{X=X_0}$ 。

2.2 输入变量的半不变量计算

PLF-CM 的关键是半不变量的计算。常规数值法可准确、高效地求得分布函数简单 (如正态分布、离散分布等) 的随机变量的半不变量, 但难以用于分布函数复杂的随机变量。对于后者, 可根据样本矩阵及半不变量与中心矩的关系进行计算, 步骤如下。

a. 根据输入随机变量 x 的分布函数, 由 1.3 节采样方法采样得到 n 个样本 ($x_1, x_2, \dots, x_n$), 按式 (16) 计算得到 x 的各阶中心矩 $\alpha_{(v)}$ 。

$$\alpha_{(v)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^v \quad v = 1, 2, \dots \quad (16)$$

其中, μ 为 x 的期望。

b. 根据半不变量与中心矩的关系 [14], 按式 (17) 计算 x 的各阶半不变量 $\gamma_{(v)}$ 。

$$\begin{cases} \gamma_{(1)} = \mu \\ \gamma_{(2)} = \alpha_{(2)} \\ \gamma_{(3)} = \alpha_{(3)} \\ \gamma_{(4)} = \alpha_{(4)} - 3\alpha_{(2)}^2 \\ \gamma_{(5)} = \alpha_{(5)} - 10\alpha_{(3)}\alpha_{(2)} \\ \gamma_{(6)} = \alpha_{(6)} - 15\alpha_{(4)}\alpha_{(2)} - 10\alpha_{(3)}^2 + 30\alpha_{(2)}^3 \\ \gamma_{(7)} = \alpha_{(7)} - 21\alpha_{(5)}\alpha_{(2)} - 35\alpha_{(4)}\alpha_{(3)} + 210\alpha_{(3)}\alpha_{(2)}^2 \\ \gamma_{(8)} = \alpha_{(8)} - 28\alpha_{(6)}\alpha_{(2)} - 56\alpha_{(5)}\alpha_{(3)} - \\ \quad 35\alpha_{(4)}^2 + 560\alpha_{(3)}^2\alpha_{(2)} - 630\alpha_{(2)}^4 \\ \vdots \end{cases} \quad (17)$$

2.3 输出变量的半不变量计算

当系统各节点注入功率彼此独立时, 节点 i 注入功率的扰动量 ΔX_i 可表示为:

$$\Delta X_i = \Delta X_{Gi} \oplus \Delta X_{Li} \quad (18)$$

其中, $\oplus$ 表示卷积运算; ΔX_{Gi} 和 ΔX_{Li} 分别为发电机注入功率和负荷注入功率的扰动量。

根据卷积运算与半不变量的转换关系及半不变量的可加性 [15], 扰动量 ΔX_i 的 k 阶半不变量 $\Delta X_i^{(k)}$ 可通过式 (19) 得到。

$$\Delta X_i^{(k)} = \Delta X_{Gi}^{(k)} + \Delta X_{Li}^{(k)} \quad (19)$$

其中, $\Delta X_{Gi}^{(k)}$ 和 $\Delta X_{Li}^{(k)}$ 分别为发电机和负荷注入功率扰动量的 k 阶半不变量。

利用半不变量的齐次性 [16] 及线性化潮流模型可得输出变量的各阶半不变量:

$$\begin{cases} \Delta D^{(k)} = S_0^{(k)} \Delta X^{(k)} \\ \Delta E^{(k)} = T_0^{(k)} \Delta X^{(k)} \end{cases} \quad (20)$$

其中, $S_0^{(k)}$ 和 $T_0^{(k)}$ 分别为矩阵 S_0 和 T_0 中各元素的 k 次幂所构成的矩阵。

当系统各节点注入功率 X 具有相关性时, 需要对式 (20) 进行修正。根据式 (5), 可将 X 表示成不相关向量 Y 的组合 (利用了 SVD 的性质 2)。在此基础上对式 (20) 进行修正得到:

$$\begin{cases} \Delta D^{(k)} = (S_0 H)^{(k)} \Delta Y^{(k)} = S_1^{(k)} \Delta Y^{(k)} \\ \Delta E^{(k)} = (T_0 H)^{(k)} \Delta Y^{(k)} = T_1^{(k)} \Delta Y^{(k)} \end{cases} \quad (21)$$

其中, $\Delta Y^{(k)}$ 为变量 Y 的 k 阶半不变量。

2.4 Cornish-Fisher 级数展开

根据式 (20) 及式 (21) 得到输出变量的半不变量后, 可通过级数展开逼近得到输出变量的概率分布特性。与其他级数展开相比, Cornish-Fisher 级数在计算非正态分布的概率分布时收敛性更好、精度更高 [16], 因此本文采用该级数。设输出变量 e 的分

位数为 τ , 则 $e(\tau)$ 可表示为:

$$e(\tau) = \zeta(\tau) + \frac{\zeta^2(\tau) - 1}{6} g_3 + \frac{\zeta^3(\tau) - 3\zeta(\tau)}{24} g_4 - \frac{2\zeta^3(\tau) - 5\zeta(\tau)}{36} g_3^2 + \frac{\zeta^4(\tau) - 6\zeta^2(\tau) + 3}{120} g_5 + \dots \quad (22)$$

其中, $\zeta(\tau)$ 为标准正态分布 CDF 的反函数; g_v 为 v 阶规格化半不变量。

根据公式 $e(\tau) = F^{-1}(\tau)$, 可得 e 的 CDF $F(e)$ 。对 $F(e)$ 求导可得 e 的 PDF $f(e)$ 。

3 算法流程

综上, 本文提出的 SVD 结合 UDS 的 PLF-CM 计算方法 (SU-PLF-CM) 流程如图 1 所示, 具体步骤如下。

a. 输入基础数据。包括配电网结构参数、输入变量 x_i 的 CDF 和 PDF、相关系数矩阵 ρ_x 及采样规模 n 等。

b. 采用 1.3 节所述采样方法产生输入变量样本。

c. 判断 x_i 是否服从正态或离散分布。若是, 则采用常规数值法计算其半不变量; 否则, 根据样本及中心矩与半不变量的关系计算 x_i 的各阶半不变量。

d. 采用牛顿-拉夫逊算法在基准点进行一次性确定性潮流计算, 获得输出变量 D_0 、 Z_0 及灵敏度矩阵 S_0 和 T_0 。

e. 判断 X 是否具有相关性。若是, 则由式 (21) 计算输出变量的各阶半不变量; 否则, 由式 (20) 计算输出变量的各阶半不变量。

f. 采用 Cornish-Fisher 级数展开求得输出变量的 CDF 和 PDF。

4 算例分析

PLF-CM 的计算精度不随系统规模的变化而改变^[17], 本文以改造后的 IEEE 14 节点测试系统为算例进行仿真分析。

4.1 系统概况

假设风电场 W_1 接入节点 4, 光伏电站 PV_1 、 PV_2 、 PV_3 分别接入节点 5、10 和 14, 如图 2 所示。风电场和各光伏电站均采用恒功率因数控制方式, 装机容量分别均取 10 MW、20 MW、30 MW、40 MW 时, 对应新能源渗透率分别为 15.38%、30.77%、46.15% 和 61.54%。

风电场风速 l 的 PDF $f(l)$ 近似服从双参数的 Weibull 分布:

$$f(l) = \frac{w}{c} \left(\frac{l}{c} \right)^{w-1} e^{-\left(\frac{l}{c} \right)^w} \quad (23)$$

其中, l 、 w 、 c 分别为风速、Weibull 分布的尺度参数和

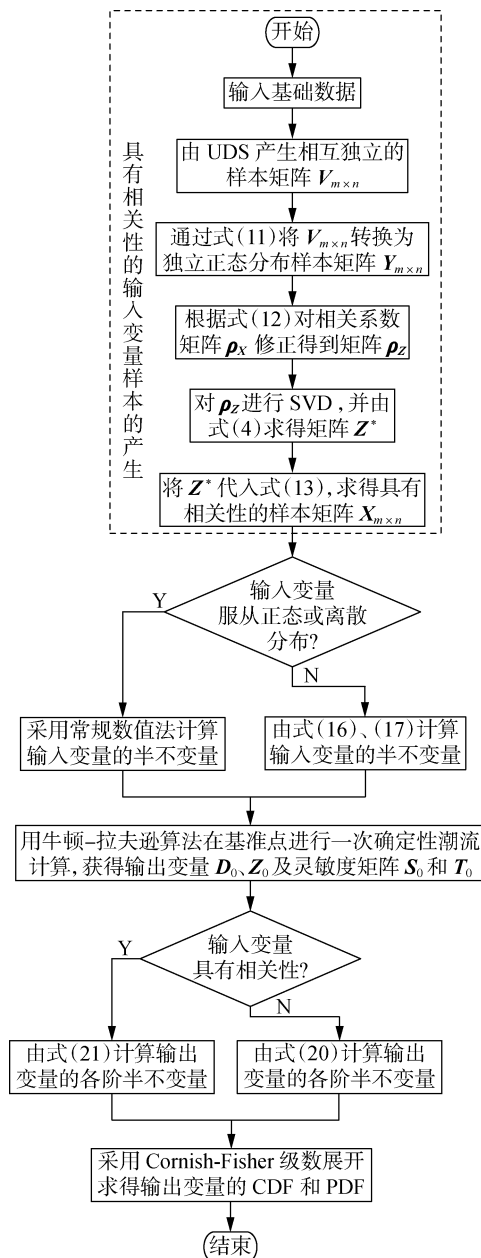


图 1 SU-PLF-CM 流程图

Fig.1 Flowchart of SU-PLF-CM

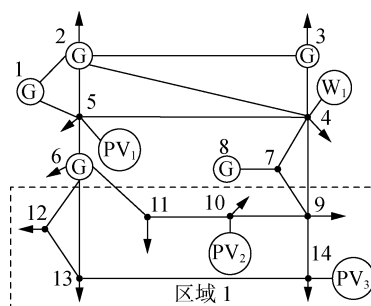


图 2 IEEE 14 节点系统接线图

Fig.2 Wiring diagram of IEEE 14-bus system

形状参数。

风电场有功出力-风速 (P_w-l) 模型由式 (24) 表示^[18]。

$$P_w = \begin{cases} 0 & l \leq l_{ci} \\ k_1 l + k_2 & l_{ci} < l \leq l_r \\ P_r & l_r < l \leq l_{co} \\ 0 & l > l_{co} \end{cases} \quad (24)$$

其中, l_{ci} 、 l_r 、 l_{co} 分别为风电场的切入风速、额定风速以及切出风速; P_r 为风电场的额定输出功率; $k_1 = P_r / (l_r - l_{ci})$; $k_2 = -k_1 l_{ci}$ 。

光伏电站有功出力 P_{pv} 的 PDF $f(P_{pv})$ 近似服从 Beta 分布^[8]:

$$f(P_{pv}) = \frac{\Gamma(v+\beta)}{\Gamma(v)\Gamma(\beta)} \left(\frac{P_{pv}}{P_{max}} \right)^{v-1} \left(1 - \frac{P_{pv}}{P_{max}} \right)^{\beta-1} \quad (25)$$

其中, v 、 β 为 Beta 分布的形状参数; P_{max} 为光伏电站的最大有功出力。

本算例中,取 $d=14.1178$, $c=2.0178$, $l_{ci}=3$ m/s, $l_r=16$ m/s, $l_{co}=25$ m/s, $v=2.06$, $\beta=2.50$ 。

设风电场及光伏电站有功出力相关系数矩阵 ρ_w 为:

$$\rho_w = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 & 0.8 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

式(26)是一个非正定矩阵。

系统所有负荷服从期望为稳态值、标准差为期望值 10% 的正态分布,且区域 1 中节点 9—14 的有功负荷存在相关性,相关系数矩阵 ρ_L 为:

$$\rho_L = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.7 & 0.1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.7 & 1 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 & 1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

式(27)是一个正定矩阵。

系统输入随机变量 X 包括风电场、光伏电站有功出力和负荷,综合式(26)和式(27)知 ρ_X (见附录 1)为非正定矩阵。如果采用常用的 Cholesky 分解,将无法生成样本,本文用 SVD 取代 Cholesky 分解。

4.2 采样方法测试

利用 LHS 生成独立均匀分布样本,再借助 Nataf 变换生成满足指定分布的相关性样本,这是一种常用的采样方法^[19],记为方法 1。本文第 1 节中引入 UDS 替代 LHS 对上述方法进行改进得到的方法,记为方法 2。

设方法 1 采样规模分别为 10^4 次和 10^3 次,方法 2 采样规模为 10^3 次,图 3 比较了根据 3 种样本空间拟合得到的输入变量概率密度曲线。可见,方法 2 采样 10^3 次得到的曲线与方法 1 采样 10^4 次得到的曲线(基准曲线)高度吻合,而方法 1 采样 10^3 次得

到的曲线误差偏大。这表明 UDS 通过较少的样本数据即可反映随机变量总体的分布信息,与文献[10]的结论相符,本文引入 UDS 提高了采样效率。

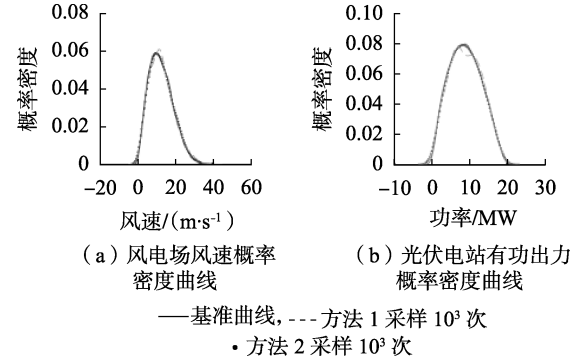


图3 采样方法比较

Fig.3 Comparison of sampling methods

4.3 PLF-CM 计算精度和适应性验证

蒙特卡洛模拟法 MCSM (Monte Carlo Simulation Method) 精度高,常作为基准衡量其他 PLF 方法的准确性^[9]。以下利用本文提出的采样方法(即方法 2)生成的 10^3 次样本,分别以 MCSM 和 PLF-CM 进行 PLF 计算,并对结果进行比较验证 PLF-CM 的有效性和快速性。

在 PLF-CM 研究中,当所考虑的 ρ_X 为正定矩阵时,文献[7-8]以 Cholesky 分解处理 ρ_X ,由 $\rho_X = HH^T$ 求得矩阵 H ,再根据式(5)可将具有相关性的输入变量 X 表示成不相关向量 Y 的组合,该做法其实有偏差,由此生成的向量 Y 对应的相关系数矩阵 ρ_Y 并不是单位阵。如果用 Cholesky 分解处理输入变量的协方差矩阵 C_X ,由 $C_X = HH^T$ 求得矩阵 H ,再由式(5)求得 Y ,则得到的 ρ_Y 为单位阵,可类似式(6)进行证明。附录 2 中给出了算例。

本文所提出的 ρ_X 正定/非正定时的 PLF-CM 计算方法,与现有 PLF-CM 的区别仅在于用 SVD 替代 Cholesky 分解。虽然分解方法不同,但 SVD 和 Cholesky 分解都满足 1.2 节所述性质,它们在样本形成和输出变量半不变量的计算过程中所起的作用也是相同的。因此,下文将对用 SVD 处理 ρ_X 和用 SVD 处理 C_X 时 PLF-CM 的计算结果进行比较,进一步验证后种做法的正确性。

定义式(28)所示输出变量期望值和标准差的相对误差指标 ε_ζ^γ 来衡量计算结果的精度。

$$\varepsilon_\zeta^\gamma = |(\varepsilon_{CM}^\gamma - \varepsilon_{MC}^\gamma) / \varepsilon_{MC}^\gamma| \times 100\% \quad (28)$$

其中, γ 表示输出变量的类型,包括电压幅值 U 、相角 θ 和支路有功 P 、无功 Q ; ζ 表示输出变量的数字特征,包括期望 μ 和标准差 σ ; ε_{CM}^γ 、 ε_{MC}^γ 分别为 PLF-CM 和 MCSM 得到的输出变量结果值。

表 1 给出渗透率为 15.38% 时,各输出变量误差指标 ε_ζ^γ 的平均值 $\varepsilon_{\zeta,mean}^\gamma$ 、最小值 $\varepsilon_{\zeta,min}^\gamma$ 和最大值 $\varepsilon_{\zeta,max}^\gamma$ 。

表 1 渗透率为 15.38% 时输出变量的相对误差指标

Table 1 Relative error indexes of output variables when penetration is 15.38%

方法	输出变量	$\varepsilon_{\xi, \text{mean}}^{\gamma}/\%$		$\varepsilon_{\xi, \text{min}}^{\gamma}/\%$		$\varepsilon_{\xi, \text{max}}^{\gamma}/\%$	
		μ	σ	μ	σ	μ	σ
分解 C_X	U	0.003	0.839	0.001	2.174	0.005	0.071
	θ	0.038	0.511	0.035	0.013	0.048	1.307
	P	0.037	1.351	0.002	0.014	0.125	4.363
	Q	0.633	4.061	0.011	0.609	3.613	6.781
分解 ρ_X	U	0.002	70.46	0.000 2	13.66	0.005	175.4
	θ	0.084	16.68	0.055	0.538	0.167	48.62
	P	0.132	42.28	0.008	0.588	0.833	156.5
	Q	0.517	130.8	0.027	11.35	3.73	410.3

可见,采用 SVD 处理 C_X 时,PLF-CM 求得各输出变量的 $\varepsilon_{\xi, \text{mean}}^{\gamma}$ 均小于 4.1%, $\varepsilon_{\xi, \text{max}}^{\gamma}$ 均小于 6.8%,精度较高。采用 SVD 处理 ρ_X 时, $\varepsilon_{\xi, \text{mean}}^{\gamma}$ 的最大值达到 130.8%, $\varepsilon_{\xi, \text{max}}^{\gamma}$ 的最大值达到 410.3%,误差较大的原因在于用 SVD 处理 ρ_X 求得的 Y 仍然具有相关性,在式(21)的计算中引入了误差。

为评估 PLF-CM 对新能源接入比例的适应性,表 2 给出不同渗透率下各输出变量的相对误差平均值 $\varepsilon_{\xi, \text{mean}}^{\gamma}$ 。可见,采用 SVD 处理 ρ_X 时,计算结果不准确,而采用 SVD 处理 C_X 时,PLF-CM 始终保持较高的计算精度, $\varepsilon_{\xi, \text{mean}}^{\gamma}$ 最大值不超过 4.9%, PLF-CM 能适应高比例新能源并网的 PLF 分析。

表 2 不同新能源渗透率下相对误差平均值

Table 2 Average relative error values for different new energy penetrations

方法	指标	指标值/%			
		15.38%	30.77%	46.15%	61.54%
分解 C_X	$\varepsilon_{\mu, \text{mean}}^U$	0.003	0.007	0.012	0.019
	$\varepsilon_{\sigma, \text{mean}}^U$	0.839	2.124	0.650	0.920
	$\varepsilon_{\mu, \text{mean}}^{\theta}$	0.038	0.075	0.144	0.254
	$\varepsilon_{\sigma, \text{mean}}^{\theta}$	0.520	1.343	0.349	0.357
	$\varepsilon_{\mu, \text{mean}}^P$	0.037	0.144	0.361	0.618
	$\varepsilon_{\sigma, \text{mean}}^P$	1.351	1.458	0.549	0.680
	$\varepsilon_{\mu, \text{mean}}^Q$	0.633	1.630	1.783	3.169
	$\varepsilon_{\sigma, \text{mean}}^Q$	4.061	4.875	4.164	3.982
分解 ρ_X	$\varepsilon_{\mu, \text{mean}}^U$	0.002	0.008	0.010	0.018
	$\varepsilon_{\sigma, \text{mean}}^U$	70.46	90.11	130.97	113.60
	$\varepsilon_{\mu, \text{mean}}^{\theta}$	0.084	0.172	0.129	0.275
	$\varepsilon_{\sigma, \text{mean}}^{\theta}$	16.68	14.84	13.61	16.91
	$\varepsilon_{\mu, \text{mean}}^P$	0.132	0.285	0.345	3.629
	$\varepsilon_{\sigma, \text{mean}}^P$	42.28	41.82	43.21	33.13
	$\varepsilon_{\mu, \text{mean}}^Q$	0.517	1.745	5.733	3.048
	$\varepsilon_{\sigma, \text{mean}}^Q$	130.80	190.08	228.55	190.20

注:表中数据为渗透率。

表 3 给出不同新能源渗透率下 PLF-CM 和 MCSM 的耗时比较。可见,PLF-CM 一直保持着很高的加速比。图 4 和图 5 比较了 PLF-CM 和 MCSM 在新能源渗透率为 61.54% 时计算得到的节点 10 电压幅值、节点 14 电压相角、支路 13-14 有功、支路 4-9 无功的概率密度曲线和累积分布曲线(图中电压均为标幺值)。虽然节点 10、14 及支路 13-14、4-9 距

离新能源发电网点较近,概率分布特性受新能源出力影响较大,PLF-CM 依然较准确地进行了评估。

表 3 不同新能源渗透率下算法耗时比较

Table 3 Time consumption comparison among different new energy penetrations

渗透率/%	耗时/s	
	MCSM	PLF-CM
15.38	11.140 5	0.258 9
30.77	12.814 3	0.259 9
46.15	12.293 5	0.287 4
61.54	11.504 6	0.266 3

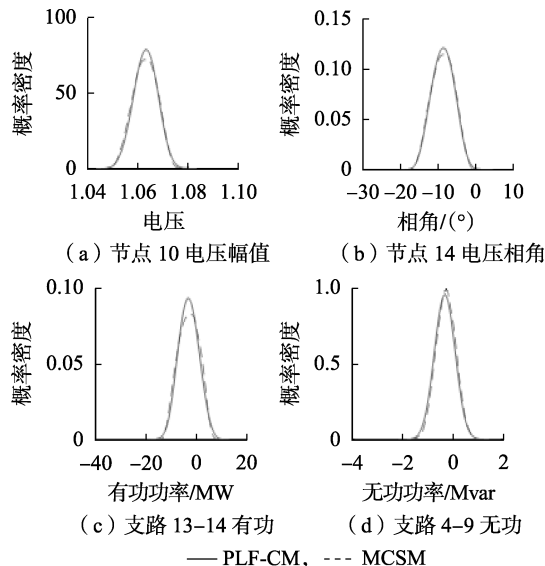


图 4 输出变量的概率密度曲线

Fig.4 Probability density curves of output variables

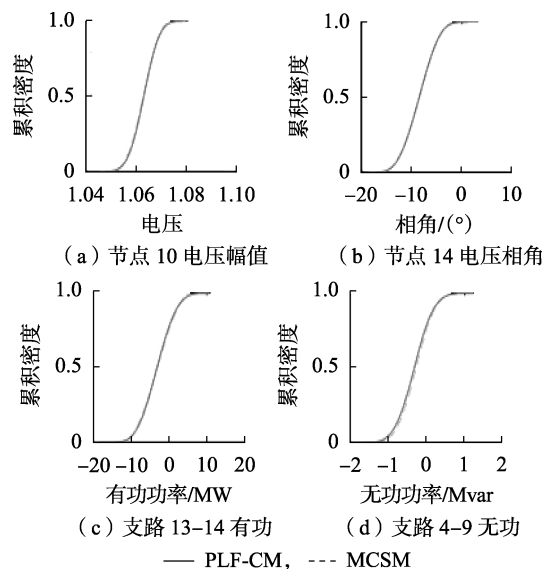


图 5 输出变量的累积分布曲线

Fig.5 Cumulative distribution curves of output variables

5 结论

本文提出一种 SVD 结合 UDS 的 PLF-CM 计算方法,其具有以下特点:

a. 通过 UDS 生成初始样本,采用 SVD 处理输入变量的相关系数矩阵 ρ_X (正定或非正定),结合 Nataf 变换,产生服从指定分布且相关系数矩阵满足给定条件的输入随机变量样本,提高采样效率,拓展 PLF-CM 的应用范围;

b. 当输入变量 X 具有相关性时,利用 SVD 处理 X 的协方差矩阵 C_X ,将具有相关性的输入变量表示成不相关变量的组合,可准确计算输出变量的半不变量及概率统计特性;

c. PLF-CM 计算效率高,能适用于新能源高渗透率电力系统的 PLF 计算,精度满足工程应用要求,具有较好的实用价值。

附录见本刊网络版 (<http://www.epae.cn>)。

参考文献:

- [1] BORKOWSKA B. Probabilistic load flow[J]. IEEE Transactions on Power Apparatus & Systems, 1974, PAS-93(3): 752-759.
- [2] 方斯顿,程浩忠,徐国栋,等. 基于 Nataf 变换含相关性的扩展准蒙特卡洛随机潮流方法[J]. 电工技术学报, 2017, 32(2): 255-263.
FANG Sidun, CHENG Haozhong, XU Guodong, et al. A Nataf transformation based on extended quasi Monte Carlo simulation method for solving probabilistic load flow problems with correlated random variables[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2017, 32(2): 255-263.
- [3] 徐潇源,严正,冯冬涵,等. 基于输入变量秩相关系数的概率潮流计算方法[J]. 电力系统自动化, 2014, 38(12): 54-61.
XU Xiaoyuan, YAN Zheng, FENG Donghan, et al. Probabilistic load flow calculation based on rank correlation coefficient of input random variable[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(12): 54-61.
- [4] 徐青山,黄煜,刘建坤,等. 采用混合高斯模型及边缘变换技术的蒙特卡洛随机潮流方法[J]. 电力系统自动化, 2016, 40(16): 23-30.
XU Qingshan, HUANG Yu, LIU Jiankun, et al. Probabilistic load flow method using Monte Carlo simulation based on Gaussian mixture model and marginal transformation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2016, 40(16): 23-30.
- [5] 吴晨曦,文福拴,陈勇,等. 含有风电与光伏发电以及电动汽车的电力系统概率潮流[J]. 电力自动化设备, 2013, 33(10): 8-15.
WU Chenxi, WEN Fushuan, CHEN Yong, et al. Probabilistic load flow of power system with WFs, PVs and PEVs[J]. Electric Power Automation Equipment, 2013, 33(10): 8-15.
- [6] USAOLA J. Probabilistic load flow with correlated wind power injections[J]. Electric Power Systems Research, 2010, 80(5): 528-536.
- [7] 石东源,蔡德福,陈金富,等. 计及输入变量相关性的半不变量法概率潮流计算[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(28): 104-113.
SHI Dongyuan, CAI Defu, CHEN Jinfu, et al. Probabilistic load flow calculation based on cumulant method considering correlation between input variables[J]. Proceedings of the CSEE, 2012, 32(28): 104-113.
- [8] 黄煜,徐青山,卞海红,等. 基于拉丁超立方采样技术的半不变量法随机潮流计算[J]. 电力自动化设备, 2016, 36(11): 112-119.
HUANG Yu, XU Qingshan, BIAN Haihong, et al. Cumulant method based on Latin hypercube sampling for calculating probabilistic power flow[J]. Electric Power Automation Equipment, 2016, 36(11): 112-119.
- [9] 刘宇,高山,杨胜春,等. 电力系统概率潮流算法综述[J]. 电力系统自动化, 2014, 38(23): 127-135.
LIU Yu, GAO Shan, YANG Shengchun, et al. Review on algorithms for probabilistic load flow in power system[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(23): 127-135.
- [10] 张润楚,王兆军. 均匀设计抽样及其优良性质[J]. 应用概率统计, 1996(4): 337-347.
ZHANG Runchu, WANG Zhaojun. Uniform design sampling and its fine properties[J]. Applied Probability, 1996(4): 337-347.
- [11] 方斯顿,程浩忠,徐国栋,等. 基于 Nataf 变换和准蒙特卡洛模拟的随机潮流方法[J]. 电力自动化设备, 2015, 35(5): 38-44.
FANG Sidun, CHENG Haozhong, XU Guodong, et al. Probabilistic load flow method based on Nataf transformation and quasi Monte Carlo simulation[J]. Electric Power Automation Equipment, 2015, 35(5): 38-44.
- [12] HYVÄRINEN A, OJA E. Independent component analysis: algorithms and applications[J]. Neural Networks, 2000, 13(4-5): 411-430.
- [13] XIAO Q. Evaluating correlation coefficient for Nataf transformation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2014, 37(4): 1-6.
- [14] 刘苏琴. 考虑风电机组模型的电力系统随机潮流计算[D]. 南京: 东南大学, 2007.
LIU Suqin. Probabilistic load flow in power systems containing wind farms[D]. Nanjing: Southeast University, 2007.
- [15] 刘立士. 半不变量的概率组合性质[D]. 沈阳: 东北大学, 2006.
LIU Lishi. The probabilistic and combinatorial characteristics of the cumulants[D]. Shenyang: Northeastern University, 2006.
- [16] 郭效军,蔡德福. 不同级数展开的半不变量法概率潮流计算比较分析[J]. 电力自动化设备, 2013, 33(12): 85-90.
GUO Xiaojun, CAI Defu. Comparison of probabilistic load flow calculation based on cumulant method among different series expansions[J]. Electric Power Automation Equipment, 2013, 33(12): 85-90.
- [17] 胡泽春,王锡凡. 基于半不变量法的随机潮流误差分析[J]. 电网技术, 2009, 33(18): 32-37.
HU Zechun, WANG Xifan. Error analysis of the probabilistic load flow based on cumulant method[J]. Power System Technology, 2009, 33(18): 32-37.
- [18] 张里,刘俊勇,刘友波,等. 计及风速相关性的电网静态安全风险评估[J]. 电力自动化设备, 2015, 35(4): 84-89.
ZHANG Li, LIU Junyong, LIU Youbo, et al. Static security risk assessment of power system considering wind speed correlation[J]. Electric Power Automation Equipment, 2015, 35(4): 84-89.
- [19] CHEN Yan, WEN Jinyu, CHENG Shijie. Probabilistic load flow method based on Nataf transformation and Latin hypercube sampling[J]. IEEE Transactions on Sustainable Energy, 2013, 4(2): 294-301.
- [20] GALICIA S. The real time data for wind speed of the Galician wind farm[EB/OL]. (2016-04-01)[2017-05-20]. <http://www.sotaventogalicia.com/en/real-time-data/historical>.

作者简介:



毛晓明

毛晓明(1971—),女,湖北武汉人,副教授,博士,主要研究方向为电力系统分析与计算(E-mail: mxmsunny@163.com);

叶嘉俊(1993—),男,广东韶关人,硕士研究生,主要研究方向为电力系统随机分析。

(下转第 172 页 continued on page 172)

Power Automation Equipment, 2017, 37(11): 138-144.

- [23] 谢红玲, 律方成. 基于信息融合的变压器状态评估方法研究[J]. 华北电力大学学报, 2006(2): 8-11.

XIE Hongling, LÜ Fangcheng. Transformer condition evaluation based on information fusion[J]. Journal of North China Electric Power University, 2006(2): 8-11.

- [24] 陈法法, 汤宝平, 姚金宝. 基于DSmT与小波网络的齿轮箱早期故障融合诊断[J]. 振动与冲击, 2013, 32(9): 40-45.

CHEN Fafa, TANG Baoping, YAO Jinbao. Gearbox incipient fault fusion diagnosis based on DSmT and wavelet neural network[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(9): 40-45.

作者简介:



刘云鹏

com)。

刘云鹏(1976—), 男, 安徽六安人, 教授, 博士, 主要研究方向为特高压输电技术以及电气设备在线检测和外绝缘(E-mail: liuyunpeng@ncepu.edu.cn);

付浩川(1993—), 男, 河北沧州人, 硕士研究生, 主要研究方向为电气设备故障预警及健康管理(E-mail: fhc_ncepu@163.com)。

Transformer fault diagnosis technology based on AdaBoost-RBF algorithm and DSmT

LIU Yunpeng^{1,2}, FU Haochuan¹, XU Ziqiang¹, LI Gang³, GAO Shuguo⁴, DONG Wangying¹

(1. Hebei Provincial Key Laboratory of Power Transmission Equipment Security Defense, North China Electric Power University, Baoding 071003, China; 2. State Key Laboratory of Alternate Electrical Power System with Renewable Energy Sources, North China Electric Power University, Beijing 102206, China; 3. School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China; 4. State Grid Hebei Electric Power Research Institute, Shijiazhuang 050011, China)

Abstract: Aiming at the low accuracy of shallow machine learning theory in transformer fault diagnosis and the fact that most diagnostic methods only refer to a single information feature, a transformer fault diagnosis method based on AdaBoost-RBF algorithm and DSmT(Dezert-Smarandache Theory) is proposed. The dissolved gas in oil, test and gas production rate data, which can reflect the transformer fault information, are used to form the diagnostic parameter space. AdaBoost algorithm is applied to improve the RBF neural network algorithm. A parallel training unit is constructed with AdaBoost-RBF algorithm to construct the BBA(Basic Belief Assignment) for the transformer fault recognition framework. Based on the idea of multi-source information fusion, the final diagnosis conclusion can be achieved by applying DSmT to fuse the BBA, which overcomes the limitations of D-S evidence theory that it is unable to solve the fusion problem of high conflict evidences. The case study of 110 kV transformer is carried out, the result shows that the proposed method has good practicability.

Key words: power transformers; fault diagnosis; AdaBoost-RBF; DSmT; basic belief assignment; multi-source information fusion; high conflict evidence

(上接第165页 continued from page 165)

Probabilistic load flow calculation based on cumulant method combining singular value decomposition and uniform design sampling

MAO Xiaoming, YE Jiajun

(School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In the process of sample formation, the PLF-CM(Probabilistic Load Flow based on Cumulant Method) calculation may encounter the condition that the correlation coefficient matrix of input variables is non-positive definite, where the commonly used Cholesky decomposition is no longer applicable. A PLF-CM calculation method with the combination of SVD(Singular Value Decomposition) and UDS(Uniform Design Sampling) is proposed. The random variable samples with the consideration of correlation are obtained by the combination of SVD, UDS and Nataf transformation, which are used to calculate the cumulants of some input variables that are hardly be solved by the conventional numerical methods. The SVD is adopted to deal with the covariance matrix of input variables to accurately calculate the cumulants of output variables, and the probability distribution of output variables is obtained through Cornish-Fisher series expansion. The modified IEEE 14-bus test system is taken as an example to verify the rapidity, effectiveness, and adaptability of the proposed method to high permeability new energy power generation.

Key words: electric power systems; probabilistic load flow; cumulant method; singular value decomposition; uniform design sampling

附录 1:

[illegible]

附录 2:

以西班牙某风电场每十分钟实测风速数据 $\mathbf{X}_w$ (共 4032 组)^[20]为例, 计算得到风电场间风速的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_w$ 和协方差矩阵 $\mathbf{C}_w$ 分别为:

$$\boldsymbol{\rho}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0.0331 & 0.0699 & 0.1132 \\ 0.0331 & 1 & 0.3884 & 0.1752 \\ 0.0699 & 0.3884 & 1 & 0.3629 \\ 0.1132 & 0.1752 & 0.3629 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{C}_w = \begin{bmatrix} 7.5561 & 0.2971 & 0.9509 & 1.1288 \\ 0.2971 & 10.6543 & 6.2712 & 2.0747 \\ 0.9509 & 6.2712 & 24.4662 & 6.5122 \\ 1.1288 & 2.0747 & 6.5122 & 13.1652 \end{bmatrix} \quad (2)$$

如对 $\boldsymbol{\rho}_w$ 进行 Cholesky 分解, 即 $\boldsymbol{\rho}_w = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_1^T$, 分解后得到下三角矩阵:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0331 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0699 & 0.3863 & 1 & 0 \\ 0.1132 & 0.1715 & 0.3139 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

根据 $\mathbf{Y}_{w1} = \mathbf{H}_1^{-1} \mathbf{X}_w$, 可求得 $\mathbf{Y}_{w1}$, $\mathbf{Y}_{w1}$ 的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_{w1}$ 为:

$$\boldsymbol{\rho}_{w1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0052 & 0.0320 & 0.0137 \\ 0.0052 & 1 & 0.1415 & -0.0469 \\ 0.0320 & 0.1415 & 1 & -0.1268 \\ 0.0137 & -0.0469 & -0.1268 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

可见, $\mathbf{Y}_{w1}$ 中各变量仍然具有相关性。

如果对实测风速数据 $\mathbf{X}_w$ 的协方差矩阵 $\mathbf{C}_w$ 进行 Cholesky 分解, 即 $\mathbf{C}_w = \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_2^T$, 分解后得到下三角矩阵:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 2.7488 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1081 & 3.2623 & 0 & 0 \\ 0.3459 & 1.9109 & 4.5492 & 0 \\ 0.4106 & 0.6223 & 1.1389 & 3.3634 \end{bmatrix} \quad (5)$$

再根据 $\mathbf{Y}_{w2} = \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{X}_w$, 可求得 $\mathbf{Y}_{w2}$, $\mathbf{Y}_{w2}$ 的相关系数矩阵 $\boldsymbol{\rho}_{w2}$ 为:

$$\boldsymbol{\rho}_{w2} = \begin{bmatrix} 1 & 1.7847\text{e}^{-17} & 2.8413\text{e}^{-17} & 1.0145\text{e}^{-16} \\ 1.7847\text{e}^{-17} & 1 & -2.0129\text{e}^{-16} & -2.0546\text{e}^{-17} \\ 2.8413\text{e}^{-17} & -2.0129\text{e}^{-16} & 1 & 1.5267\text{e}^{-16} \\ 1.0145\text{e}^{-16} & -2.0546\text{e}^{-17} & 1.5267\text{e}^{-16} & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\boldsymbol{\rho}_{w2}$ 为单位矩阵。

本文还重复了文献[7]中 5.1 与 5.2 节的算例。该算例中, 对输入变量相关系数矩阵进行 Cholesky 分解求得的 $\mathbf{Y}$ 对应的相关系数矩阵为:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & -0.0012 & -4.34\text{e}^{-4} & 7.67\text{e}^{-5} \\ -0.0012 & 1 & 4.49\text{e}^{-5} & 3.27\text{e}^{-4} \\ -4.34\text{e}^{-4} & 4.49\text{e}^{-5} & 1 & 7.03\text{e}^{-4} \\ 7.67\text{e}^{-5} & 3.27\text{e}^{-4} & 7.03\text{e}^{-4} & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

对输入变量协方差矩阵进行 Cholesky 分解求得的 $\mathbf{Y}$ 对应的相关系数矩阵为:

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1.22\text{e}^{-15} & 1.89\text{e}^{-16} & -2.53\text{e}^{-16} \\ -1.22\text{e}^{-15} & 1 & -6.92\text{e}^{-16} & -2.65\text{e}^{-16} \\ 1.89\text{e}^{-16} & -6.92\text{e}^{-16} & 1 & -3.27\text{e}^{-16} \\ -2.53\text{e}^{-16} & -2.65\text{e}^{-16} & -3.27\text{e}^{-16} & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

可见，该算例中，式（8）为单位矩阵，但式（7）近似为单位矩阵，因此用 Cholesky 分解处理相关系数矩阵这一有误做法也得到了精度不错的结果。