

基于阿基米德 Copula 和拉丁超立方采样的 概率最优潮流计算

肖青,周少武

(湖南科技大学 机电工程学院,湖南 湘潭 411201)

摘要:提出一种考虑随机变量相关性的概率最优潮流算法。选用广义 lambda 分布拟合最优潮流模型中的随机变量,建立逆累积分布函数;基于 Clayton、Gumbel、Frank、Joe 生成元,构筑4种部分嵌套式阿基米德 Copula 模型对随机变量的相关性结构建模;选取 Kendall 秩相关系数描述随机变量的相关性,采用相关系数匹配法求取 Copula 模型的参数;基于生成元的拉普拉斯逆变换,将阿基米德 Copula 与拉丁超立方采样相结合,生成相关的随机样本用于概率最优潮流计算。对某地区10个风电场风速样本的建模和分析,验证了广义 lambda 分布和部分嵌套式阿基米德 Copula 模型的有效性。基于 IEEE 118 节点系统对2种拉丁超立方采样法进行了对比。

关键词:概率最优潮流;广义 lambda 分布;阿基米德 Copula;拉丁超立方采样

中图分类号:TM 744

文献标志码:A

DOI:10.16081/j.epae.201910001

0 引言

电力系统中存在很多不确定因素,比如风机出力、负荷需求等^[1-3]。概率最优潮流 P-OPF (Probabilistic Optimal Power Flow) 能考虑不确定因素对系统运行的影响,是电力系统规划设计的有力工具。

P-OPF 将最优潮流 OPF (Optimal Power Flow) 模型中的随机变量视为输入变量,将 OPF 的解视为输出变量。P-OPF 的目标是:基于输入变量的统计信息求取输出变量的统计信息。常用的 P-OPF 算法有累积量法、点估计法 PEM (Point Estimation Method) 和蒙特卡洛模拟 MCS (Monte Carlo Simulation) 法。

累积量法^[4]将 OPF 计算中的优化过程视为一种概率映射,基于线性化代理模型,用输入变量的累积量求取输出变量的累积量,但该方法存在2个不足:由于 OPF 模型中存在不等式约束,输出变量与输入变量间函数关系的非线性很大,线性化该函数引入的误差不可忽略;累积量法要求输入变量相互独立,在相关性的处理上另需繁杂的数学计算。

PEM^[5-6]采用多项式模型逼近 P-OPF 输入、输出变量的函数关系,可以考虑一部分非线性项的影响;而且,PEM 可以与高斯 Copula 结合,考虑输入变量相关性的影响。无迹变换^[7-8] UT (Unscented Transformation) 的思想与 PEM 类似,其优点是可以直接处理输入变量的相关性。目前,这2种算法已被用于求取 P-OPF 输出变量的数学期望和标准差。

MCS^[9-10]是一种适用性较广的方法,只要建立 P-OPF 输入变量的概率模型,再生成样本进行 OPF 计

算求得输出变量的样本,就可以求得输出变量的统计矩、概率密度函数 PDF (Probability Distribution Function) 和累积分布函数 CDF (Cumulative Distribution Function)。但 MCS 需庞大的计算量保证结果收敛、准确。为提高计算效率,常用策略是:采用低偏差序列替代 MCS 的伪随机序列,加快收敛速度,如 Sobol 数列^[11-14]。此外,拉丁超立方采样 LHS (Latin Hypercube Sampling) 也是较好的低偏差序列生成算法,已在概率潮流计算中展现出较快的收敛速度^[15-16]。

由于 P-OPF 输入变量的相关性对计算结果影响较大^[10,17],需要引入概率模型考虑输入变量相关性的影响。常用的模型有高斯 Copula^[13,18]、M-Copula^[19-20]、Pair Copula^[3,10,21] 和阿基米德 Copula^[18]。高斯 Copula 基于多维正态分布,容易生成相关的随机样本,但其相关性结构比较单一。M-Copula 将不同类型的 Copula 进行凸组合,得到一个混合 Copula 模型,能更好地描述随机变量的相关性结构。Pair Copula 则是将不同类型的二维 Copula 模型进行组合,描述随机变量相关性结构,灵活性很高。

本文基于4种生成元,构筑4种部分嵌套式阿基米德 Copula PNAC (Partially Nested Archimedean Copula) 模型,通过拟优度测试筛选最优 Copula 模型描述 P-OPF 输入随机变量的相关性结构。选用中心采样和随机采样的 LHS 生成低偏差序列,基于生成元的拉普拉斯逆变换生成阿基米德 Copula 样本。最后,利用广义 lambda 分布 GLD (Generalized Lambda Distribution) 拟合 P-OPF 输入变量的逆累积分布函数,生成相关随机样本,用于 P-OPF 计算。

1 基于 LHS 的 P-OPF 算法

以燃料成本最小为目标函数的 OPF 模型如下:

收稿日期:2018-09-29;修回日期:2019-08-16

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51577057)

Project supported by the National Natural Science Foundation of China(51577057)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min h = \sum_{i \in S_G} (a_{2i} P_{Gi}^2 + a_{1i} P_{Gi} + a_{0i}) \\ \text{s.t. } F(\theta, V, P_G, Q_G, P_D, Q_D) = 0 \\ \underline{V} \leq V \leq \bar{V} \\ \underline{P}_G \leq P_G \leq \bar{P}_G \\ \underline{Q}_G \leq Q_G \leq \bar{Q}_G \\ |P_{ij}| \leq \bar{P}_1 \\ |P_{ji}| \leq \bar{P}_1 \end{array} \right. \quad (1)$$

其中, a_{2i} 、 a_{1i} 、 a_{0i} 为机组 i 的燃料费用系数; S_G 为系统中所有发电机组集合; P_{Gi} 为机组 i 有功出力; θ 和 V 分别为节点电压相角向量和幅值向量; P_G 和 Q_G 分别为系统中发电机有功出力向量和无功出力向量; P_D 和 Q_D 分别为系统的有功负荷向量与无功负荷向量; \bar{V} 和 \underline{V} 分别为系统节点电压幅值上、下限; \bar{P}_G 和 \underline{P}_G 分别为系统常规机组有功出力上、下限; \bar{Q}_G 和 \underline{Q}_G 分别为系统常规机组无功出力上、下限; P_{ij} 和 P_{ji} 为连接节点 i 和 j 的线路有功潮流向量; \bar{P}_1 为线路有功潮流约束上限。式(1)中的等式约束表示系统的潮流方程。

将 OPF 模型中的所有随机参数记为一个随机向量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$, 其中 m 为 OPF 模型中随机变量数。将 OPF 的解记为 y , 则有:

$$y = H(\mathbf{x}) \quad (2)$$

其中, $H(\cdot)$ 表示 y 关于 \mathbf{x} 的函数关系。

设 x_i 的 CDF 为 $F_i(x_i)$, 记:

$$u_i = F_i(x_i) \quad (3)$$

则 u_i 为一个服从标准均匀分布的随机变量, 且有:

$$x_i = F_i^{-1}(u_i) \quad (4)$$

其中, $F_i^{-1}(\cdot)$ 为 x_i 的逆累积分布函数。

利用式(4), 可将式(2)中的 y 表示成关于标准均匀随机变量的函数:

$$y = H[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_i^{-1}(u_i), \dots, F_m^{-1}(u_m)] = G(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) = G(\mathbf{u}) \quad (5)$$

其中, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_m)$ 为标准均匀分布随机向量。

式(2)中的 $H(\cdot)$ 是一个由 OPF 模型定义的隐函数, 因此式(5)中的 $G(\cdot)$ 也是一个隐函数, 其解析式未知, 需引入数值方法计算 y 的统计矩:

$$E[y^r] \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n G^r(t_k) \quad t_k = (t_{1,k}, \dots, t_{i,k}, \dots, t_{m,k}) \quad (6)$$

其中, $E[y^r]$ 表示 y 的 r 阶原点矩; n 为积分节点数; t_k ($k=1, 2, \dots, n$) 为第 k 个积分节点; $G(t_k)$ 为将 t_k 代入 OPF 模型通过优化计算求得的 y 值。为避免“维数灾”问题, 需引入非张量积算法求取 $E[y^r]$ 。

基于累积量法和 PEM 的 P-OPF 计算可求得 y 的累积量或原点矩(中心矩)的值; 而基于 LHS 的

P-OPF 计算可以得到 y 的样本, 除了原点矩外, 能提供更多关于 y 的统计信息, 比如概率加权矩 PWM (Probability Weighted Moment)、分位数等。

由于 LHS 是在标准均匀分布概率空间 $[0, 1]^m$ 采取样本, 需要用式(4)中的逆累积分布函数将样本转换成 \mathbf{x} 的样本。此外, 若随机向量 \mathbf{x} 不是独立的, 则 \mathbf{u} 会含有相关的随机变量, 需选用合适的 Copula 模型描述 \mathbf{u} 的相关性, 将 LHS 生成的独立随机样本转换成相关的随机样本。

2 GLD

在实际应用中, 若随机向量 \mathbf{x} 的边际概率分布未知, 需选用合适的模型重构其概率分布。而现有的大多数概率模型只适用于部分特定的分布, 且逆累积分布函数也没有闭式表达式, 不便于与 LHS 结合基于式(4)生成样本。

本文选用 GLD^[22] 逼近式(4)中的 $F^{-1}(\cdot)$:

$$x = F^{-1}(u) \approx \lambda_1 + \frac{u^{\lambda_3} - (1-u)^{\lambda_4}}{\lambda_2} \quad (7)$$

其中, λ_1 — λ_4 为待定参数; x 为任一随机变量; u 为服从标准均匀分布的随机变量。由式(7)可导出 x 的 PDF:

$$f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 u^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-u)^{\lambda_4-1}} \quad (8)$$

对常规的概率分布而言, 其统计特征可由前 4 阶统计矩很好地描述, 本文选用 PWM 描述 x 的随机性。给定样本 $x_1, \dots, x_k, \dots, x_n$, 有:

$$\beta_r = \frac{1}{n} \sum_{k=r+1}^n \binom{k-1}{r} x_k \quad r = 0, 1, \dots \quad (9)$$

其中, β_r 为 \mathbf{x} 的 r 阶 PWM。GLD 的 r 阶 PWM 如下^[23]:

$$\beta_r = \frac{\lambda_1}{1+r} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{1+r+\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2} \frac{r!}{\prod_{k=0}^r (\lambda_4 + k + 1)} \quad r = 0, 1, \dots \quad (10)$$

将式(10)与式(9)中 x 的 PWM 相匹配, 求解所得的方程组, 即可求得 GLD 的参数 λ_1 — λ_4 , 详细的步骤可参见文献[23]。

3 PNAC 模型

3.1 模型构筑

常用的 Copula 模型有椭圆型 Copula 和阿基米德 Copula 两大类^[24]。与椭圆型 Copula 相比, 阿基米德 Copula 的主要优点是: 相关性结构较灵活, 基于不同的生成元可构筑不同的 Copula 模型, 用以描述不同的相关性结构^[25]。

根据构筑方式的不同, 阿基米德 Copula 分为可交换式、完全嵌套式和部分嵌套式 3 种。其中,

PNAC的相关性结构最为灵活。在本文5.1节中,采用PNAC对10座风电场的风速建模,这里给出10变量PNAC的构筑方式:

$$\begin{cases} C(u_1, \dots, u_{10}) = \phi_1 \left\{ \sum_{i=1}^5 \phi_1^{-1} [C_i(u_{2i-1}, u_{2i})] \right\} \\ C_i(u_{2i-1}, u_{2i}) = \phi_{i+1} [\phi_{i+1}^{-1}(u_{2i-1}) + \phi_{i+1}^{-1}(u_{2i})] \end{cases} \quad (11)$$

其中, $\phi(\cdot)$ 为生成元; $\phi^{-1}(\cdot)$ 为生成元的反函数; $i=1, 2, \dots, 5$ 。

表1中列出了4种常用的生成元(表中, t 为符号变量, θ 为生成元的参数), 由其构筑的PNAC模型分别称为Clayton Copula、Gumbel Copula、Frank Copula、Joe Copula(表达式见附录)。

表1 4种阿基米德Copula的生成元

Copula 模型	生成元 $\phi(t)$	相关系数 τ
Clayton	$(1+t)^{-1/\theta}$	$\theta/(\theta+2)$
Gumbel	$e^{-t^{1/\theta}}$	$(\theta-1)/\theta$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln[1 - e^{-t}(1 - e^{-\theta})]$	$1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt$
Joe	$1 - (1 - e^{-t})^{1/\theta}$	$1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\theta k + 2)[\theta(k-1) + 2]}$

3.2 参数求解

记 u_1, u_2 为2个相关的标准均匀随机变量, 且两者的相关性结构由如下二维Copula模型给定:

$$C(u_1, u_2) = \phi[\phi^{-1}(u_1) + \phi^{-1}(u_2)]$$

则 u_1, u_2 间的Kendall秩相关系数为:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi^{-1}(t)}{[\phi^{-1}(t)]^2} dt \quad (12)$$

表1中列出了4种生成元对应的 τ 值表达式。同一种生成元的不同参数会得到不同的 τ 值。式(11)中, 10个变量间的相关系数不完全相同, 任意2个变量间的 τ 值可由如下性质求出^[25]: 在阿基米德Copula模型中, 任意2个变量的相关性结构由结合两者的最内层生成元给定。

以 u_1-u_4 为例, 式(11)中 u_1, u_2 的相关性结构由 $\phi_2(\cdot)$ 给定; u_3, u_4 的相关性结构由 $\phi_3(\cdot)$ 给定; 而 u_i, u_j ($i=1, 2; j=3, 4$) 的相关性结构由 $\phi_1(\cdot)$ 给定。以Clayton Copula为例, u_1-u_4 的相关系数矩阵为:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{\theta_2}{\theta_2+2} & \frac{\theta_1}{\theta_1+2} & \frac{\theta_1}{\theta_1+2} \\ \frac{\theta_2}{\theta_2+2} & 1 & \frac{\theta_1}{\theta_1+2} & \frac{\theta_1}{\theta_1+2} \\ \frac{\theta_1}{\theta_1+2} & \frac{\theta_1}{\theta_1+2} & 1 & \frac{\theta_3}{\theta_3+2} \\ \frac{\theta_1}{\theta_1+2} & \frac{\theta_1}{\theta_1+2} & \frac{\theta_3}{\theta_3+2} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

其中, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 分别为生成元 $\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot), \phi_3(\cdot)$ 的参数。

对于给定的相关随机变量样本, 求出秩相关系数矩阵, 再将其与PNAC模型的相关系数矩阵匹配, 即可求得Copula模型的参数。

3.3 样本生成

在生成阿基米德Copula的样本时, 目前较常用的算法是基于Rosenblatt转换^[20]。对于 m 变量的阿基米德Copula模型, 需要求出 m 个条件概率分布函数, 再利用其反函数生成相关的随机样本。当 m 较大时, 阿基米德Copula的条件概率分布函数非常复杂, 会导致繁琐的计算。

在式(11)中, 给定了构筑方式后, 阿基米德Copula的相关性结构完全由生成元 $\phi(\cdot)$ 决定, 即生成元 $\phi(\cdot)$ 包含了阿基米德Copula相关性结构的信息。文献[25]建议用拉普拉斯变换将 $\phi(t)$ 转换成一个定义在正实轴上的概率分布:

$$\phi(t) = e^{-ts} dG(s) \quad 0 \leq s < \infty \quad (13)$$

$$G(s) = LT^{-1} \left(\frac{\phi(t)}{t} \right) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} \frac{\phi(t)}{t} e^{st} dt$$

其中, $LT^{-1}(\cdot)$ 为拉普拉斯逆变换算子。

此时, $G(s)$ 包含了阿基米德Copula的相关性结构信息。只要基于 $G(s)$ 生成随机数, 就可以用其将独立的标准均匀随机数转换成阿基米德Copula的样本。

记 s_1, s_{i+1} ($i=1, 2, \dots, 5$) 为6个随机变量, 其CDF由式(11)中的6个生成元按式(14)给定。

$$\begin{cases} G_1(s_1) = LT^{-1} \left(\frac{\phi_1(t)}{t} \right) \\ G_{i+1}(s_{i+1}) = LT^{-1} \left(e^{-s_i \phi_1^{-1}(\phi_{i+1}(t))} \right) \quad i=1, 2, \dots, 5 \end{cases} \quad (14)$$

其中, $G_1(s_1)$ 为 s_1 的CDF; $G_{i+1}(s_{i+1})$ 为 s_{i+1} 的CDF ($i=1, 2, \dots, 5$)。文献[26]列出了表1中4种生成元对应的 $G_1(s_1)$; 文献[24]给出了求解 $G_{i+1}(s_{i+1})$ 的数值算法; 文献[27]提供了生成 s_1, s_{i+1} ($i=1, 2, \dots, 5$) 样本的程序。

记 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \dots, v_{10})$ 为独立的标准均匀分布随机向量, $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \dots, u_{10})$ 为相关的标准均匀分布随机向量, 则 \mathbf{u} 的样本可由式(15)生成。

$$u_{2i-1} = \phi_{i+1} \left(\frac{-\ln v_{2i-1}}{s_{i+1}} \right), \quad u_{2i} = \phi_{i+1} \left(\frac{-\ln v_{2i}}{s_{i+1}} \right) \quad i=1, 2, \dots, 5 \quad (15)$$

只要 s_{i+1} ($i=1, 2, \dots, 5$) 的CDF由式(14)中的拉普拉斯逆变换给定, 则式(15)中 \mathbf{u} 的相关性结构就由式(11)的PNAC模型给定。

4 算法步骤

本文求解P-OPF问题的具体步骤如下。

(1)基于式(11)构筑 Copula 模型,求出 OPF 模型中相关随机变量的相关系数矩阵,采用 3.2 节的方法求出 Copula 模型的系数。

(2)利用 LHS 生成 n 个独立的样本 $\mathbf{v}_k=(v_{1,k}, \dots, v_{i,k}, \dots, v_{m,k}) (k=1, 2, \dots, n)$,并用式(15)将 \mathbf{v}_k 转换成相关的标准均匀随机样本 $\mathbf{u}_k=(u_{1,k}, \dots, u_{i,k}, \dots, u_{m,k})$ 。

(3)用式(7)中的 GLD 进行分布拟合,求出 OPF 模型中各随机变量的逆累积分布函数,将 \mathbf{u}_k 转换成具有指定边际概率分布的样本 $\mathbf{x}_k=(x_{1,k}, \dots, x_{i,k}, \dots, x_{m,k})$ 。

(4)将 \mathbf{x}_k 代入式(1)的 OPF 模型,求出各个输出变量的样本 y_k , 计算其数学期望 μ 和标准差 σ :

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \mu)^2 \quad (16)$$

5 算例分析

5.1 风速建模

以我国西南部 10 座风电场的风速样本为例,验证 GLD 和 PNAC 模型的有效性。首先,用 GLD 对 10 座风电场的风速进行分布拟合, GLD 参数如表 2 所示。

表 2 GLD 参数

Table 2 Parameters of GLD

风电场	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1	3.115 5	0.032 6	0.018 2	0.116 3
2	7.094 8	0.121 8	0.173 4	0.256 9
3	9.572 9	0.084 2	0.250 7	0.284 4
4	10.534 7	0.085 0	0.453 0	0.046 0
5	3.962 7	0.037 8	0.028 8	0.152 3
6	2.767 7	-0.020 7	-0.014 3	-0.069 7
7	4.698 2	0.041 3	0.044 9	0.128 1
8	16.275 2	0.008 5	0.039 8	0.010 2
9	3.942 6	0.042 1	0.050 3	0.151 1
10	4.806 0	0.035 2	0.043 2	0.091 2

图 1 给出了风电场 4 和风电场 8 的风速 PDF。同时,选用韦伯分布 $W(a, b)$ 拟合风电场 4、风电场 8 风速的分布,韦伯分布的 PDF 函数和 r 阶 PWM 表达式如下:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \\ \beta_r = \frac{b\Gamma(1+1/a)}{(1+r)^{1+1/a}} \quad r=0, 1, \dots \end{cases} \quad (17)$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数。

由于韦伯分布是一个 2 参数的模型,在拟合风速的概率分布时,只能考虑前 2 阶统计矩的信息;而 GLD 是一个 4 参数的模型,可以容纳风速样本前 4 阶统计矩的信息,从而能更加精准地描述风速的统计特征。如图 1 所示,在拟合风速的概率分布时, GLD 要优于韦伯分布。

本文选用 Kendall 秩相关系数描述 10 座风电场风速的相关性(风速的相关系数矩阵见附录)。由

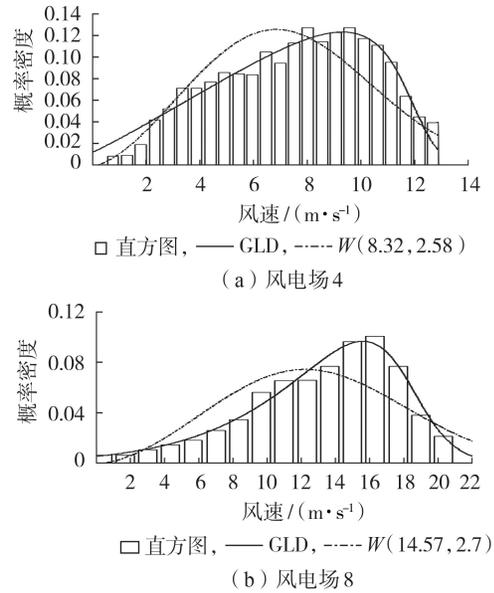


图 1 风电场 4 和 8 的风速 PDF

Fig.1 PDF of wind speed for Wind Farm 4 and 8

3.2 节所述的方法求出 4 种 Copula 模型的参数,如表 3 所示。

表 3 Copula 模型参数

Table 3 Parameters of Copula models

Copula 模型	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
Clayton	0.430	3.181	2.090	3.525	1.677	3.917
Gumbel	1.215	2.591	2.045	2.762	1.838	2.959
Frank	1.635	8.316	5.940	9.041	4.989	9.861
Joe	1.381	4.004	2.943	4.340	2.546	4.726

由于不同样本的相关性结构各异,故不存在一个普适的 Copula 模型,这就需要对不同的 Copula 模型进行比较,选取一个最优的模型来描述样本的相关性结构。本文基于样本概率值对 4 种 Copula 模型进行拟优度检验:首先,基于 GLD 和 Copula 模型,求出各个风速样本的概率值;然后,用风速样本的经验分布求出各个样本对应的概率值;最后,计算两者误差的最小值、平均值和最大值如表 4 所示, Copula 模型的 P-P 图如图 2 所示。可见 Gumbel Copula 和 Frank Copula 对风速相关性结构拟合效果较好,且 Gumbel Copula 略优,故选取 Gumbel Copula 生成风速样本。

5.2 P-OPF 计算

采用 IEEE 118 节点系统进行 P-OPF 计算^[17,21],

表 4 Copula 模型误差

Table 4 Errors of Copula models

Copula 模型	最小值	平均值	最大值
Clayton	0.003 2	0.024	0.082
Gumbel	0.001 7	0.015	0.047
Frank	0.004 9	0.016	0.077
Joe	0.002 3	0.027	0.085

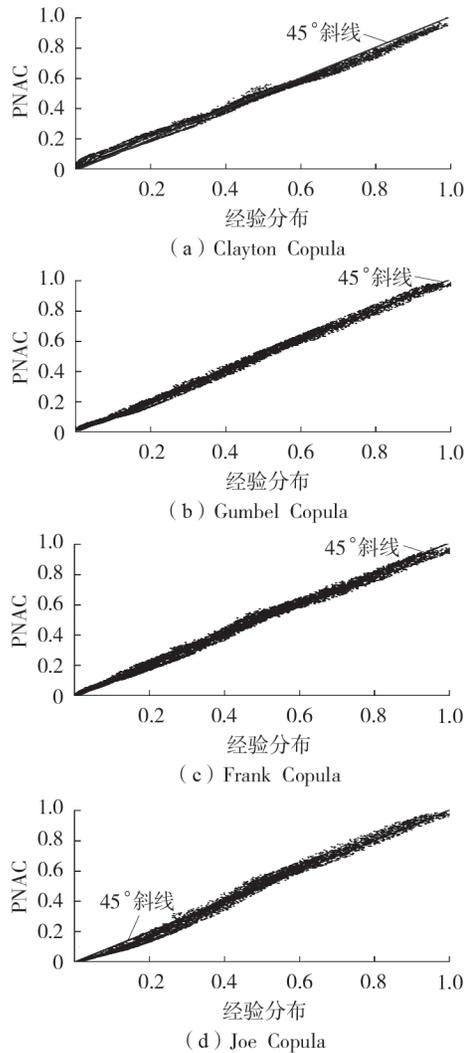


图2 Copula模型P-P图

Fig.2 P-P plot of Copula models

分别在该系统的节点2、3、5、13、14、16、44、50、52、53、82—84、86接入10台风机,风速的概率分布和相关性结构与5.1节的10座风电场风速相同。各节点的负荷需求服从正态分布,数学期望为基准值,变异系数为0.05。

LHS有中点采样和随机采样2种采样法,将其分别记为LHS-I、LHS-II。按第4节所述的算法步骤,分别用这2种采样法进行P-OPF计算。为评价2种采样法的精度,定义如下指标:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\mu_{r,k} - \mu_{r,k}^*}{\mu_{r,k}^*} \right| \times 100\% \quad (18)$$

其中, $\mu_{r,k}^*$ 为由MCS所得的第 k 个输出变量(电压幅值、相角、线路有功潮流、无功潮流)的数学期望($r=1$)或标准差($r=2$); $\mu_{r,k}$ 为由LHS所得的第 k 个输出变量的数学期望或标准差; N 为P-OPF输出变量总数。

以 10^5 次MCS所得的计算结果作为基准,2种采样法所得的数学期望、标准差的相对误差平均值如

表5所示。由于随机采样法每次所得的样本点不同,故用随机采样法进行10次P-OPF计算,取误差平均值评价LHS-II的精度。由表5可知,在相同的采样规模下,随机采样法的精度略高于中点采样法。此外,LHS在求取数学期望时,所需的样本规模较小,100个样本点即可得到较精确的结果;而在求取标准差时,所需的样本规模要更大,1000个样本点才得到较精准的结果。

表5 2种采样法的误差比较

Table 5 Error comparison between two sampling methods

样本规模	参数	LHS-I		LHS-II		计算时间/s
		数学期望/%	标准差/%	数学期望/%	标准差/%	
100	电压	0.003	2.95	0.003	2.14	96.77
	相角	0.76	4.02	0.53	3.12	
	有功潮流	1.06	3.57	0.71	2.64	
	无功潮流	1.31	4.25	0.84	3.79	
200	电压	0.001	1.97	0.001	1.74	193.54
	相角	0.58	2.98	0.41	2.15	
	有功潮流	0.89	3.37	0.55	2.98	
500	无功潮流	0.79	3.19	0.58	2.73	483.85
	电压	0.001	1.72	0.000 6	1.34	
	相角	0.39	2.14	0.17	1.31	
	有功潮流	0.58	2.88	0.38	1.94	
1 000	无功潮流	0.63	2.06	0.34	1.87	967.75
	电压	0.000 5	1.09	0.000 4	0.84	
	相角	0.10	1.14	0.10	0.73	
	有功潮流	0.33	1.93	0.12	1.36	
	无功潮流	0.27	1.74	0.23	1.02	

基于1000次LHS-II所得的样本,分别用GLD、韦伯分布重构线路85-88无功潮流的概率分布,如图3所示(图中无功潮流为标么值)。相比于韦伯分布,GLD能考虑第2、3阶PWM的统计信息,故其拟合效果优于韦伯分布。

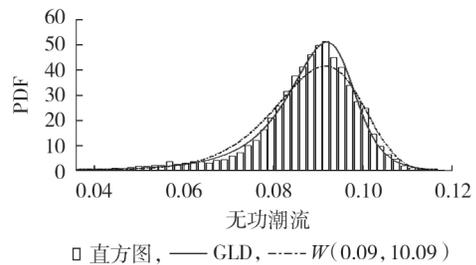


图3 线路85-88无功潮流的PDF

Fig.3 PDF of reactive power for Line 85-88

6 结论

本文结合GLD、PNAC和LHS,提出一种考虑随机变量相关性的P-OPF算法,仿真实验的结果表明:

- (1)与常用的2参数韦伯分布相比,4参数的广义lambda系统能更好地拟合风速的概率分布;
- (2)基于Gumbel生成元的PNAC能较好地拟合

风速的相关性结构;

(3)采用 LHS 进行 P-OPF 计算时,随机采样法略优于中点采样法。

附录见本刊网络版(<http://www.epae.cn>)。

参考文献:

- [1] 聂永辉,冯浩然,于永利,等. 含风电场的电力系统动态优化潮流[J]. 电力自动化设备,2017,37(2):15-21.
NIE Yonghui, FENG Haoran, YU Yongli, et al. Dynamic optimal power flow of power system with wind power[J]. Electric Power Automation Equipment, 2017, 37(2): 15-21.
- [2] 钱臻,刘建坤,陈静,等. 计及风电不确定性的含 UPFC 电力系统的两阶段最优潮流[J]. 电力自动化设备,2017,37(3):80-86.
QIAN Zhen, LIU Jiankun, CHEN Jing, et al. Two-stage OPF considering wind-power uncertainty for power system with UPFC[J]. Electric Power Automation Equipment, 2017, 37(3): 80-86.
- [3] 田园,汪可友,李国杰,等. 计及风电相关性的二阶锥动态随机最优潮流[J]. 电力系统自动化,2018,42(5):41-47.
TIAN Yuan, WANG Keyou, LI Guojie, et al. Dynamic stochastic optimal power flow based on second-order cone programming considering wind power correlation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2018, 42(5): 41-47.
- [4] SCHELLENBERG A, ROSEHART W, AGUADO J. Cumulant-based Probabilistic Optimal Power Flow (P-OPF) with Gaussian and Gamma distributions[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2005, 20(2): 773-781.
- [5] 雷加智,龚庆武. 基于改进点估计法的输电线路过负荷风险评估[J]. 电力自动化设备,2017,37(4):67-72.
LEI Jiazhi, GONG Qingwu. Transmission line overload risk assessment based on improved point estimate methods[J]. Electric Power Automation Equipment, 2017, 37(4): 67-72.
- [6] 张衡,程浩忠,曾平良,等. 分位数拟合的点估计法随机潮流在输电网规划中的应用[J]. 电力自动化设备,2018,38(11):43-49.
ZHANG Heng, CHENG Haozhong, ZENG Pingliang, et al. Application of stochastic power flow based on quantile fitting point estimation method in transmission network expansion planning[J]. Electric Power Automation Equipment, 2018, 38(11): 43-49.
- [7] ALIEN M, FOTUHI-FIRUZABAD M, AMINIFAR F. Unscented transformation-based probabilistic optimal power flow for modelling the effect of wind power generation[J]. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, 2013, 21(5): 1284-1301.
- [8] 鲍海波,韦化. 基于无迹变换的含大规模风电场电力系统概率最优潮流计算[J]. 电力系统自动化,2014,38(12):46-53.
BAO Haibo, WEI Hua. Probabilistic optimal power flow computation in power systems including large-scale wind farms based on unscented transformation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(12): 46-53.
- [9] 李亚琼,周胜军,王同勋,等. 基于优选带宽核密度估计的谐波概率潮流分析方法[J]. 电力自动化设备,2017,37(8):131-136.
LI Yaqiong, ZHOU Shengjun, WANG Tongxun, et al. Harmonic probabilistic power flow analysis based on kernel density estimation with optimized bandwidth design[J]. Electric Power Automation Equipment, 2017, 37(8): 131-136.
- [10] CAO J, YAN Zheng. Probabilistic optimal power flow considering dependences of wind speed among wind farms by Pair-Copula method[J]. International Journal of Electrical Power & Energy System, 2017, 84: 296-307.
- [11] ZOU Bin, XIAO Qing. Solving probabilistic optimal power flow problem using quasi Monte Carlo method and ninth-order polynomial normal transformation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2014, 29(1): 300-306.
- [12] XIE Z Q, JI T Y, LI M S, et al. Quasi-Monte Carlo based probabilistic optimal power flow considering the correlation of wind speeds using Copula function[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 33(2): 2239-2247.
- [13] 方斯顿,程浩忠,徐国栋,等. 基于 Nataf 变换和准蒙特卡洛模拟的随机潮流计算[J]. 电力自动化设备,2015,35(8):38-44.
FANG Sidun, CHENG Haozhong, XU Guodong, et al. Probabilistic load flow method based on Nataf transformation and quasi Monte Carlo simulation[J]. Electric Power Automation Equipment, 2015, 35(8): 38-44.
- [14] 王秀丽,张择策,侯雨伸. 基于拟蒙特卡罗模拟法的主动配电网随机潮流计算[J]. 电力自动化设备,2017,37(3):7-12.
WANG Xiuli, ZHANG Zece, HOU Yushen. Stochastic load flow calculation based on quasi-Monte Carlo method for active distribution network[J]. Electric Power Automation Equipment, 2017, 37(3): 7-12.
- [15] 黄煜,徐青山,卞海红,等. 基于拉丁超立方采样技术的半不变量法随机潮流计算[J]. 电力自动化设备,2016,36(11):112-119.
HUANG Yu, XU Qingshan, BIAN Haihong, et al. Cumulant method based on Latin hypercube sampling for calculating probabilistic power flow[J]. Electric Power Automation Equipment, 2016, 36(11): 112-119.
- [16] 徐潇源,严正,冯冬涵,等. 基于输入变量秩相关系数的概率潮流计算方法[J]. 电力系统自动化,2014,38(12):54-61.
XU Xiaoyuan, YAN Zheng, PENG Donghan, et al. Probabilistic load flow calculation based on rank correlation coefficient of input random variables[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(12): 54-61.
- [17] 潘雄,周明,孔晓民,等. 风速相关性对最优潮流的影响[J]. 电力系统自动化,2013,37(6):37-41.
PAN Xiong, ZHOU Ming, KONG Xiaomin, et al. Impact of wind speed correlation on optimal power flow[J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(6): 37-41.
- [18] 蔡菲,严正,赵静波,等. 基于 Copula 理论的风电场间风速及输出功率相依结构建模[J]. 电力系统自动化,2013,37(17):9-16.
CAI Fei, YAN Zheng, ZHAO Jingbo, et al. Dependence structure models for wind speed and wind power among different wind farms based on Copula theory[J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(17): 9-16.
- [19] 潘雄,王莉莉,徐玉琴,等. 基于混合 Copula 函数的风电场出力建模方法[J]. 电力系统自动化,2014,38(14):17-22.
PAN Xiong, WANG Lili, XU Yuqin, et al. A wind farm power modelling method based on mixed Copula[J]. Automation of Electric Power Systems, 2014, 38(14): 17-22.
- [20] 刘俊,郝旭东,程佩芬,等. 结合 M-Copula 理论与半不变量的随机潮流方法[J]. 电网技术,2018,42(2):214-220.
LIU Jun, HAO Xudong, CHENG Peifen, et al. Probabilistic load flow method combining M-Copula theory and cumulants[J].

- Power System Technology, 2018, 42(2): 214-220.
- [21] 吴巍, 汪可友, 李国杰, 等. 基于Pair Copula的多维风电功率相关性分析及建模[J]. 电力系统自动化, 2013, 39(16): 37-42. WU Wei, WANG Keyou, LI Guojie, et al. Correlation analysis and modelling of multiple wind power based on Pair Copula [J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 39(16): 37-42.
- [22] RAMBERG J S, SCHMEISER B W. An approximate method for generating asymmetric random variables[J]. Communication of the ACM, 1974, 17(2): 78-82.
- [23] XIAO Qing. Modeling uncertainties in power system by generalized Lambda distribution[J]. International Journal of Emerging Electric Power Systems, 2014, 15(3): 195-203.
- [24] HOFERT M. Efficiently sampling nested Archimedean Copulas [J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2011, 55(1): 57-70.
- [25] MCNEIL A J. Sampling nested Archimedean Copulas[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2008, 78(6): 567-581.
- [26] HOFERT M. Sampling Archimedean Copulas[J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2008, 52(12): 5163-5174.
- [27] HOFERT M, MACHLER M. Nested Archimedean Copulas meet R: the nacopula package [J]. Journal of Statistical Software, 2011, 39(9): 1-20.

作者简介:



肖青

肖青(1985—),男,湖北仙桃人,博士研究生,主要研究方向为可再生能源并网影响分析、电力系统不确定量建模(**E-mail**: xaoshaoying@shu.edu.cn);

周少武(1964—),男,湖南湘潭人,教授,博士,通信作者,主要研究方向为非线性系统仿真与控制(**E-mail**: swzhou@hnust.edu.cn)。

Probabilistic optimal power flow computation based on Archimedean Copula and Latin hypercube sampling

XIAO Qing, ZHOU Shaowu

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: A probabilistic optimal power flow algorithm is proposed. The generalized lambda distribution is employed to fit the random variables in optimal power flow model and build the inverse cumulative distribution functions. Based on Clayton, Gumbel, Frank and Joe generators, four partially nested Archimedean Copula models are constructed to model the dependence structure of random variables. Kendall rank correlation coefficient is adopted to describe the dependency among random variables, and a correlation coefficient matching method is used to obtain the parameters of Copula models. Based on the inverse Laplace transformation of generators, Archimedean Copula and Latin hypercube sampling are combined to generate correlated random samples for probabilistic optimal power flow computation. The modeling and analysis for wind speed samples of ten wind farms in a region verify the effectiveness of the generalized lambda distribution and partially nested Archimedean Copula models. Two Latin hypercube sampling methods are compared based on IEEE 118-bus system.

Key words: probabilistic optimal power flow; generalized lambda distribution; Archimedean Copula; Latin hypercube sampling

附录：

Clayton Copula:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_{10}) = \left[\sum_{i=1}^5 (u_{2i-1}^{-\theta_{i+1}} + u_{2i}^{-\theta_{i+1}} - 1)^{\theta_1/\theta_{i+1}} - 4 \right]^{-1/\theta_1} \quad (\text{A1})$$

Gumbel Copula:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_{10}) = \exp \left\{ - \left\{ \sum_{i=1}^5 \left[(-\ln u_{2i-1})^{\theta_{i+1}} + (-\ln u_{2i})^{\theta_{i+1}} \right]^{\theta_1/\theta_{i+1}} \right\}^{1/\theta_1} \right\} \quad (\text{A2})$$

Frank Copula:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_{10}) = -\frac{1}{\theta_1} \ln \left\{ 1 - \frac{1}{(1-e^{-\theta_1})^4} \prod_{i=1}^5 \left\{ 1 - \left[1 - \frac{(1-e^{-\theta_{i+1}u_{2i-1}})(1-e^{-\theta_{i+1}u_{2i}})}{1-e^{\theta_{i+1}}} \right]^{\theta_1/\theta_{i+1}} \right\} \right\} \quad (\text{A3})$$

Joe Copula:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_{10}) = 1 - \left\{ 1 - \prod_{i=1}^5 \left\{ 1 - \left[(1-u_{2i-1})^{\theta_{i+1}} + (1-u_{2i})^{\theta_{i+1}} - (1-u_{2i-1})^{\theta_{i+1}}(1-u_{2i})^{\theta_{i+1}} \right]^{\theta_1/\theta_{i+1}} \right\} \right\}^{1/\theta_1} \quad (\text{A4})$$

10 个风电场风速的相关系数矩阵如下：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.614 & 0.108 & 0.210 & 0.130 & 0.124 & 0.150 & 0.182 & 0.226 & 0.146 \\ 0.614 & 1 & 0.220 & 0.271 & 0.212 & 0.226 & 0.137 & 0.106 & 0.145 & 0.110 \\ 0.108 & 0.220 & 1 & 0.511 & 0.157 & 0.170 & 0.204 & 0.127 & 0.140 & 0.224 \\ 0.210 & 0.271 & 0.511 & 1 & 0.101 & 0.157 & 0.109 & 0.143 & 0.107 & 0.095 \\ 0.130 & 0.212 & 0.157 & 0.101 & 1 & 0.638 & 0.175 & 0.055 & 0.326 & 0.355 \\ 0.124 & 0.226 & 0.170 & 0.157 & 0.638 & 1 & 0.117 & 0.169 & 0.214 & 0.273 \\ 0.150 & 0.137 & 0.204 & 0.109 & 0.175 & 0.117 & 1 & 0.456 & 0.232 & 0.229 \\ 0.182 & 0.106 & 0.127 & 0.143 & 0.055 & 0.169 & 0.456 & 1 & 0.293 & 0.203 \\ 0.226 & 0.145 & 0.140 & 0.107 & 0.326 & 0.214 & 0.232 & 0.293 & 1 & 0.662 \\ 0.146 & 0.110 & 0.224 & 0.095 & 0.355 & 0.273 & 0.229 & 0.203 & 0.662 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$