基于频率采样法的线性相位滤波器设计及Matlab仿真

蔡建平，黄晓红，孙丽英，朱　艺
（河北理工大学 信息学院，河北 唐山 063000）

摘要：根据第 1 个频率采样点的不同有 2 种频率采样法来设计线形相位有限脉冲响应（FIR）滤波器，分别对应 2 种传输函数。传统的频率采样法设计线性相位滤波器时要考虑采样点的相位特性。通过研究傅里叶变换性质，对其步骤进行了改进，可以不考虑采样点的相位特性，通过对频率采样点向量 $\boldsymbol{H}(k)$ 乘以移位因子来直接进行滤波器的设计，算法简单易行。用 Matlab 进行仿真，结果表明该方法可按要求实现 4 种线性相位 FIR 滤波器。

关键词：频率采样法；线性相位滤波器；Matlab
中图分类号：TN 713　　**文献标识码**：B　　**文章编号**：1006－6047(2006)07－0059－03

0　引言

有限脉冲响应FIR（Finite Impulse Response）滤波器能够精确实现线性相位，因而应用广泛。较成熟的设计技术有窗函数法和频率采样法[1-3]，其中频率采样法是先在频域修改滤波器的预期频率特性，使之接近于实际的需要和可能，然后直接用它的傅里叶变换作为滤波器系数，根据对理想滤波器频率响应的第 1 个采样点的不同，可分为 2 种频率采样法。有关参考书中主要提到第 1 种频率采样法[4-8]，及用其设计 4 种线性相位 FIR 滤波器，本文对第 2 种频率采样法作了推导和总结。对 2 种频率采样法设计的 FIR 滤波器用 Matlab 进行仿真，本文的设计方法同传统的频率采样法不同，可以不考虑频率采样点的相位特性，因而算法简单、易行，编程简单。

1　2 种频率采样法

对给定的理想频率响应进行频率抽样，就是在 Z 平面单位圆上的 N 个等间隔点上，抽取出频率响应值。在单位圆上有 2 种抽样方式，第 1 种是第 1 个抽样点在 $\omega=0$ 处；第 2 种是第 1 个抽样点在 $\omega=\pi/N$，每种抽样方式可分为 N 是偶数和奇数 2 种[9]。

以 $N=9$ 和 $N=8$ 为例：

$N=9$，$\boldsymbol{H}=[a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ e\ \ d\ \ c\ \ b]$ 或
$\boldsymbol{H}=[a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ d\ \ c\ \ b\ \ a]$

$N=8$，$\boldsymbol{H}=[a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ d\ \ c\ \ b]$ 或
$\boldsymbol{H}=[a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ d\ \ c\ \ b\ \ a]$

2 种频率采样法的位置在 Z 平面上用图 1 表示（图中“◦”代表 Type1 型的采样点位置，“×”代表 Type 2 型的采样点位置）。

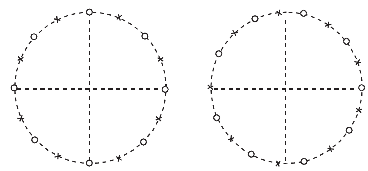

图 1　2 种频率采样方式
Fig.1 Two frequency sampling methods

Type 1　第 1 个采样点在 $\omega=0$ 处。

设理想滤波器的频率响应是 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，它是连续频率 ω 的周期函数，现对其抽样，使每个周期有 N 个抽样值，即

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)=\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega_k=\frac{2\pi}{N}k}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}) \tag{1}$$

对 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)$ 作逆离散傅里叶变换 IDFT（Inverse Discrete Fourier Transform），可得到 N 点的单位抽样序列 $\boldsymbol{h}(n)$，即

$$\boldsymbol{h}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}\qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{2}$$

将 $\boldsymbol{h}(n)$ 作为所设计滤波器的单位冲击响应，可求出该滤波器的转移函数，即

$$\boldsymbol{H}(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{h}(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}\right]z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\frac{1-z^{-N}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)k}z^{-1}} \tag{3}$$

$k=0,1,\cdots,N-1$（下同）

该系统的频率响应为

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{h}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega N}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} \tag{4}$$

收稿日期：2005－12－19；**修回日期**：2006－02－27

经推导，有

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N-1)\omega/2}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(N-1)k\pi/N}\times \frac{\sin\left[N\left(\omega-\dfrac{2k\pi}{N}\right)/2\right]}{N\sin\left[\left(\omega-\dfrac{2k\pi}{N}\right)/2\right]} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2-\pi k/N)}$$

$\boldsymbol{H}(k)$可以表示为

$$\boldsymbol{H}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{h}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{6}$$

所以，当 $\boldsymbol{h}(n)$为实数时，$\boldsymbol{H}(k)$是周期为 N 的函数，且满足：

$$|\boldsymbol{H}(k)|=|\boldsymbol{H}(N-k)| \tag{7}$$

$$\theta(k)=-\theta(N-k) \tag{8}$$

根据 N 的取值不同，为保证所设计的滤波器具有线性相位，根据对频率采样值 $\boldsymbol{H}(k)$的约束，可以得到 4 种类型的线性相位 FIR 滤波器，分别是 N 为奇数的Ⅰ型和Ⅲ型，N 为偶数的Ⅱ型和Ⅳ型[10]。

Type 2 第 1 个采样点在 $\omega=\pi/N$ 处，按照 Type 1 的方法推导得到如下结果：

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)=\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{N}} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{h}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}nk+\frac{\pi}{N}n\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{N}n}\,\mathrm{IDFT}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)] \tag{10}$$

$$\boldsymbol{H}(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)}{1-W_N^{-(k+1/2)}z^{-1}},\quad W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{\cos(N\omega/2)}{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N-1}{2}\omega}\times\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\boldsymbol{H}_{\mathrm{d}}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{\mathrm{j}\sin\left[\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{\pi}{N}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\right]}$$

$\boldsymbol{H}(k)$可表示为

$$\boldsymbol{H}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{h}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)n} \tag{12}$$

所以，当 $\boldsymbol{h}(n)$为实数时，$\boldsymbol{H}(k)$是周期为 N 的函数，且满足：

$$|\boldsymbol{H}(k)|=|\boldsymbol{H}(N-k-1)| \tag{13}$$

$$\theta(k)=-\theta(N-k-1) \tag{14}$$

同样，根据 N 的取值不同，为了保证所设计的滤波器具有线性相位，根据对频率采样值 $\boldsymbol{H}(k)$的约束，也可以得到 4 种类型的线性相位 FIR 滤波器，分别是 N 为奇数的Ⅰ型和Ⅲ型，N 为偶数的Ⅱ型和Ⅳ型。

2 Matlab 仿真

Matlab 是数字信号处理技术实现的重要手段，具有其他高级语言难以比拟的一些优点[11]，用此软件对上述 8 种类型 FIR 滤波器进行仿真，程序设计中可不考虑频率采样的相位特性。

Type 1 的 4 种线性相位滤波器设计流程如图 2 所示，其中 $\boldsymbol{V}$ 是移位因子，起到使 $\boldsymbol{h}(n)$为实数作用。

a. Ⅰ型理想的零相位 FIR 滤波器的幅度频率特性对于 $\omega=0$、π、2π 皆呈偶对称。

b. Ⅱ型理想的零相位 FIR 滤波器的幅度频率特性对于 $\omega=\pi$ 呈奇对称；对于 $\omega=0$、2π 呈偶对称，且 $\omega=\pi$ 处，幅度频率特性不为零。高通滤波器和带阻滤波器不能用这种滤波器。

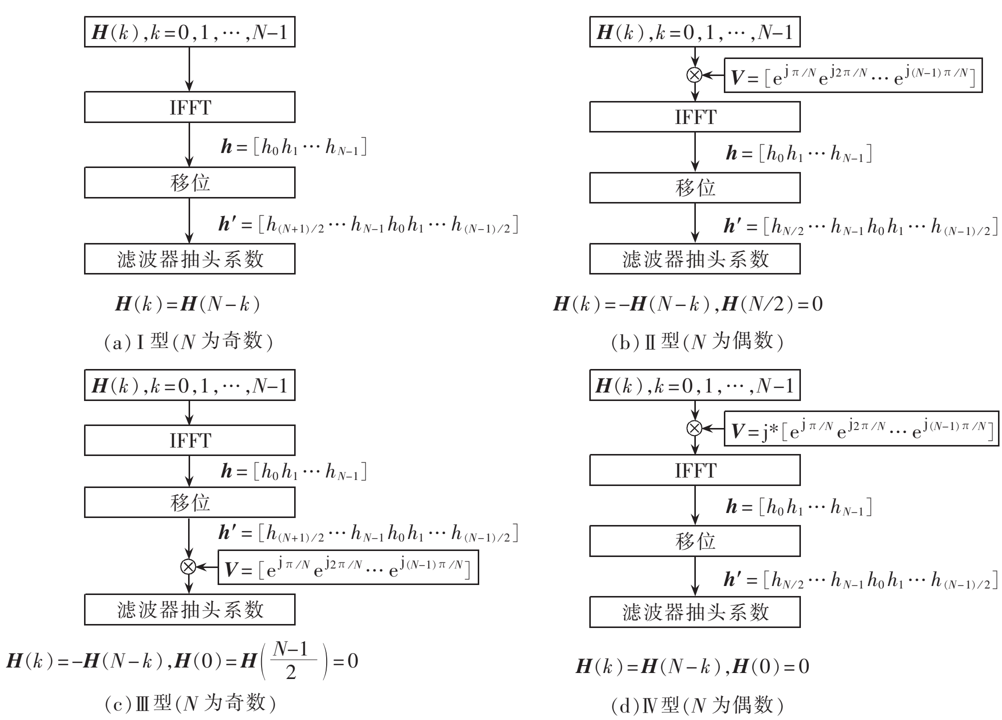

图 2 Type1 法 4 种线性相位滤波器系数形成图

Fig.2 Flowcharts of coefficient formation for four kinds of linear phase filters using method 1

c. Ⅲ型理想的零相位 FIR 滤波器的幅度频率特性对于 $\omega=0$、π、2π 皆呈奇对称;且 $\omega=0$、π、2π 处,幅度频率特性都为零。

d. Ⅳ型理想的零相位 FIR 滤波器的幅度频率特性对于 $\omega=0$、2π 呈奇对称,对于 $\omega=\pi$ 呈偶对称;且 $\omega=0$、2π 处,幅度频率特性都为零。Type 3 和 Type 4 适合于设计微分器和希尔伯特变换器。

例:用 Type 1 频率采样法设计 4 种类型滤波器。滤波响应向量分别为Ⅰ型 $\boldsymbol{H}=[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]$;Ⅱ型 $\boldsymbol{H}=[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ -1\ -1]$;Ⅲ型 $\boldsymbol{H}=[0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ -1\ -1\ -1]$;Ⅳ型 $\boldsymbol{H}=[0\ 1\ 1\ 1\ 0.5\ 1\ 1\ 1]$;实现的滤波器频率特性如图 3 所示。

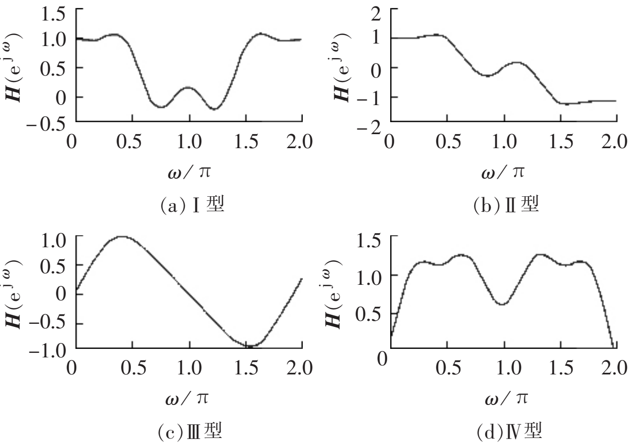

图 3 Type1 法设计的 4 种线性相位滤波器频率特性

Fig.3 Frequency characteristics of four kinds of linear phase filters using method 1

同理,Type 2 频率采样法也可以设计 4 种线性相位滤波器,只不过 $|\boldsymbol{H}(k)|=|\boldsymbol{H}(N-k-1)|$,即频率采样点的幅度值成偶对称形式,由于篇幅所限不再赘述。

3 结语

频率采样法是设计滤波器的常用方法,因此对其设计方法简化是有很大意义的。本文利用傅里叶变换的性质,提出了新的频率采样设计方法,有实际应用价值。

参考文献:

[1] 丁育美,高西全. 数字信号处理[M]. 2 版. 西安:西安电子科技大学出版社,2001.

[2] RAMIZ R,GUNES F. General design method for the filters based on the requirements and a filter design chart[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Electronics,Circuits and Systems. Lisbon,Portugal:IEEE,1998:11-14.

[3] DAM H H,NORDEBO S,TEO K L,et al. FIR filter design over discrete coefficients and least square error[J]. IEEE Proceedings on Vision,Image and Signal Processing,2000,147(6):543-548.

[4] 赵红怡,张常年. 数字信号处理及其 Matlab 实现[M]. 北京:化学工业出版社,2002.

[5] 飞思科技产品研发中心. Matlab 7 辅助信号处理技术与应用[M]. 北京:电子工业出版社,2005.

[6] BURRUS C S,MCCLELLAN J H,OPPENHEIM A V,et al. Computer - based exercises for signal processing using matlab[M]. Englewood cliffs,NJ:Prentice Hall,1994.

[7] MITRA S K. Digital signal processing,a computer-based approach[M]. 北京:清华大学出版社,2001.

[8] 宗孔德,胡广书. 数字信号处理[M]. 北京:清华大学出版社,1988.

[9] SALOUS S. The design of linear phase FIR filters using IDFT[J]. IEEE Transactions on Education,1998,41(6):229-231.

[10] MECLELLAN J H,PARKS T W,RABINER L R. A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters[J]. IEEE Trans Audio and Electroacoustics,1973,21(6):506-526.

[11] 李勇,徐震. Matlab 辅助现代工程数字信号处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2002.

(责任编辑:柏英武)

蔡建平

作者简介:

蔡建平(1956-),女,江苏无锡人,实验师,研究方向为模式识别在复杂生产过程中的应用(**E-mail**:slyingj@126.com);

黄晓红(1973-),女,吉林长春人,讲师,博士研究生,研究方向为模式识别在复杂生产过程中的应用;

孙丽英(1970-),女,河北新乐人,助理实验师,硕士,研究方向为模式识别在复杂生产过程中的应用;

朱　艺(1977-),女,江苏泰兴人,助理实验师,研究方向为模式识别在复杂生产过程中的应用。

Design of linear phase filters based on frequency sampling method and Matlab simulation

CAI Jian-ping,HUANG Xiao-hong,SUN Li-ying,ZHU Yi

(College of Information,Hebei Polytechnic University,Tangshan 063000,China)

Abstract: For two kinds of initial sampling points,two frequency sampling methods,corresponding to two transform functions,are used to design the linear phase FIR(Finite Impulse Response) filter. Steps of FIR filter design are improved based on the Fourier transform analysis and the filter is designed directly by multiplying the sampling vector $\boldsymbol{H}(k)$ by shifting factor without considering the phase property of the sampling point,which must be considered in traditional frequency sampling methods. The algorithm is easier. The simulation with Matlab shows that the proposed method can design four kinds of linear phase FIR filters as required.

Key words: frequency sampling method; linear phase filters; Matlab