

高精度插值 FFT 谐波分析

黄方能,黄成军,陈 陈,江秀臣

(上海交通大学 电子信息与电气工程学院,上海 200240)

摘要: 分析了插值快速傅里叶变换(IFFT)产生误差的原因,说明了信号的相角会对 IFFT 分析结果产生较大误差,指出不能直接把针对复信号的算法套用于实信号。针对这一产生误差的原因,提出一种高精度的 IFFT 算法,以快速傅里叶变换(FFT)为基础,对 FFT 分析的频谱进行修正计算,从而得到较精确的计算值。该算法利用 FFT 中实用的信息,并充分考虑了实信号和复信号频谱的区别,采用一系列的数学变换,可以有效克服信号相角的影响,在不明显增加计算时间的同时,提高谐波分析的精度。该算法无需采用复杂的迭代方法,对数据采样也无特殊要求,故对硬件部分要求不高,易于应用。算法的分析结果可以得到实信号中谐波精确的幅值、相角及频率。实例计算结果证实了该算法的准确性,计算精度比传统的 IFFT 有了显著提高。

关键词: 谐波; 插值 FFT; 相角

中图分类号: TM 935

文献标识码: A

文章编号: 1006-6047(2007)09-0040-03

电力系统常用的谐波^[1]检测方法是快速傅里叶变换(FFT)。由于电力系统可能存在非整数的间谐波,以及测量时的采样周期难以与实际信号的周期同步,利用 FFT 进行谐波分析存在着泄漏现象,克服泄漏现象的有效办法就是采用插值 FFT(IFTT)。但以往各种算法都存在一些缺陷^[2-9],因此,研究一种简单快速的高精度 IFFT 算法具有现实意义^[10-14]。现通过分析经典 IFFT 算法带来误差的原因,提出了一种新的改进 IFFT 算法,在不明显增加计算时间的前提下,能显著地提高 IFFT 的计算精度。

1 IFFT 简介及其存在的问题

考虑一个单频率的复正弦信号:

$$x(i\Delta t) = A \exp[j(2\pi f i \Delta t + \theta)] \quad i=0, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中 A 为幅值; f 为频率; θ 为相角。

设基准频率 $f_0 = 1/T = 1/(N\Delta t)$, $f = kf_0$, $k = l + r$, l 为 f 的整数部分, r 为 f 的小数部分 ($0 < r < 1$)。

式(1)可写为

$$x(i) = A \exp[j(2\pi k f_0 i + \theta)] \quad (2)$$

式(2)的 FFT 为

$$X(i) = A \exp(j\theta) W(k-i) \quad (3)$$

$W(i)$ 是所选时间窗函数的傅里叶变换,选择默认矩形窗函数时^[15]:

$$W(k-i) = \exp\left[j\pi \frac{N-1}{N}(k-i)\right] \times \frac{\sin[\pi(k-i)]}{\sin[\pi(k-i)/N]} \quad (4)$$

找出式(3)频谱中的最大值点及其相邻的次最大值点 $X(l)$ 及 $X(l+1)$, 将二者的模相除, 再利用一

个简化条件:

$$\sin[\pi(k-i)/N] \approx \pi(k-i)/N \quad (5)$$

可得:

$$\frac{|X(l)|}{|X(l+1)|} = \frac{1-r}{r} = \alpha \quad (6)$$

利用式(6)可以求出信号的频率值 f , 从而推出幅值 A 和相角值 θ , 因为 N 的值较大, 所以采用式(5)所带来的误差非常小, 因此 IFFT 的计算精度是相当高的。但是, 电力系统中所处理的电压或电流信号都是实信号, 情况就有所不同, 直接套用上述 IFFT 算法就有可能带来很大的误差。现考虑一个实信号, 分析如下:

$$x(i) = A \cos(2\pi k f_0 i + \theta) \quad (7)$$

其谐波频谱为

$$X(i) = 0.5A [\exp(j\theta)W(k-i) + \exp(-j\theta)W(-k-i)] \quad (8)$$

比较式(3)和式(8), 式(8)中多了一项, 直接套用式(6)进行计算得到的结果精度会受到影响, 如图 1 所示。图中向量 A_0 的幅值对应 $X(i)$ 的幅值, 向量 A_1 的幅值对应式(8)第 1 项的幅值, 向量 A_2 的幅值对应式(8)第 2 项的幅值。假设 k, i 取固定值, 则 A_0 的幅值随着角度 θ 的变化而变化。而式(3)中 $X(i)$ 的幅值和角度 θ 无关。所以对实信号套用式(6)进行 IFFT 计算存在 2 个问题: 一是向量 A_0 的幅值不等于向量 A_1 的幅值; 二是向量 A_0 的幅值和相角 θ 有关。

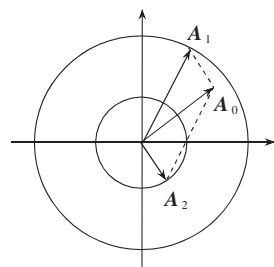


图 1 IFFT 误差演示图

Fig.1 Demonstration of IFFT error

除非 N 足够大,同时 k 也足够大,利用前述的 IFFT 算法才可能得到比较高的精度,但是国内的谐波测量仪厂商普遍采用 1 个工频周期作为采样区间,而且 k 本身就具有不确定性,所以 N, k 同时足够大的假设往往难以满足,从而在谐波分析中带来难以接受的误差。需要指出的是,在采样点不变的情况下,这样的误差仅仅通过改变时间窗函数的方法是难以得到改善的。

假设在式(7)中, $A=1, k=1.5, f_0=50$ Hz, 则当 θ 分别等于 $0, 0.5\pi$ 时, FFT 的计算结果如图 2 所示(采样区间 $T=0.02$ s, $N=32, A'$ 为幅值)。

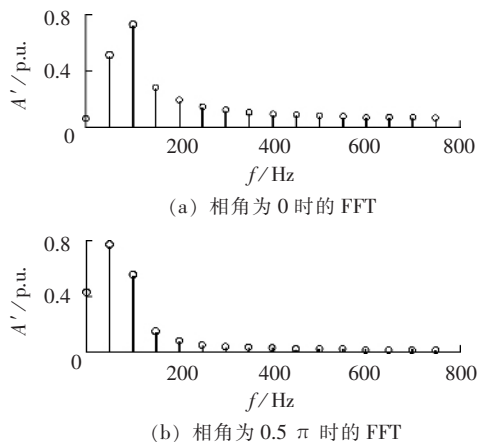


图 2 信号相角对 FFT 的影响

Fig.2 Influence of signal phase on FFT

由图 2 可见,信号相角的变化对 FFT 的分析结果有较大的影响,甚至连幅值的极值点位置都发生了变化。在这样的情况下,要想从图 2 中的 2 个 FFT 计算结果中得到相同的幅值和相角,仅利用改变时间窗函数的方法是很困难的,必须从插值法本身入手解决此问题。

2 改进的高精度 IFFT 算法

依然对式(7)的实信号进行分析,设:

$$a = \pi(N-1)/N \quad (9)$$

再利用式(5)的简化条件,式(8)可以写成

$$X(i) = \frac{AN}{2\pi} \left\{ \exp[j(a(k-i)+\theta)] \frac{\sin[(k-i)\pi]}{k-i} + \exp[-j(a(k+i)+\theta)] \frac{\sin[(k+i)\pi]}{k+i} \right\} \quad (10)$$

把式(10)的实、虚部分开,并利用一系列数学变换,可把式(10)写为

$$X(i) = \pm \frac{AN \sin r \pi}{2\pi} (U + jV) \quad (11)$$

上式中出现的 $\pm$ 号定义为“非正即负”,出现的原因是变换中所采用技巧所致,它并不影响下面的继续推导。

$$U = \frac{2k \cos(ak+\theta) \cos ai + 2i \sin(ak+\theta) \sin ai}{k^2 - i^2} \quad (12)$$

$$V = \frac{2i \sin(ak+\theta) \cos ai - 2k \cos(ak+\theta) \sin ai}{k^2 - i^2} \quad (13)$$

设 $X(i)$ 的最大值点及其相邻的次最大值点分别为

$$X(l) = \pm \frac{AN \sin r \pi}{2\pi} [U(l) + jV(l)] \quad (14)$$

$$X(l+1) = \pm \frac{AN \sin r \pi}{2\pi} [U(l+1) + jV(l+1)] \quad (15)$$

设 $U(l)/V(l) = \beta, U(l)/U(l+1) = \alpha$, 可推出:

$$2k \cos(ak+\theta) = -2l \sin(ak+\theta) B/C \quad (16)$$

$$B = \sin al - \beta \cos al, C = \cos al + \beta \sin al$$

最后,利用 $U(l)/U(l+1) = \alpha$, 得到:

$$[k^2 - (l+1)^2]/(k^2 - l^2) \times (lB/C \cos al + l \sin al) \div \{lB/C \cos[a(l+1)] + (l+1) \sin[a(l+1)]\} = -\alpha \quad (17)$$

从式(17)可以求出 k 值,则信号的频率为 kf_0 , 再将 k 代入式(16),可求得相角值:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{2kC}{2lB}\right) - ak \quad (18)$$

频率值和相角值求出后,利用式(14)可求得幅值:

$$A = \left| \frac{\text{real}[X(l)] 2\pi}{U(l) N \sin r \pi} \right| \quad (19)$$

以上分析过程看似复杂,但其实 $\sin al, \cos al$ 之类的项可以预先计算并存储,故所提出的 IFFT 计算量只是略有增加。

3 改进 IFFT 算法的计算效果

考虑如下信号:

$$x(i) = \cos(2\pi \times 1.6 f_0 i + \theta_1) + \cos(2\pi \times 20.5 f_0 i + \theta_2) \quad (20)$$

信号由 1.6 倍和 20.5 倍基准频率的 2 个谐波分量组成。其中,基准频率 f_0 为 50 Hz, 2 个谐波分量的幅值都为 1, θ_1, θ_2 为谐波分量的初相角,而 θ_1, θ_2 可以改变数值。设采样时间区间 $T=0.02$ s, 采样点数 $N=64$ 。改变 θ_1, θ_2 的值,对普通 IFFT 和所提出的 IFFT 的计算结果进行比较,比较结果见表 1 及表 2,其中频率以 f_0 的倍数给出。图 3 为 θ_1, θ_2 取 3 组值时的 FFT 分析结果(幅值)。

表 1 新 IFFT 计算结果

Tab.1 Computed results using improved IFFT

初相角	f'_1	f'_2	θ'_1	θ'_2	A'_1	A'_2
$\theta_1=0.4\pi, \theta_2=0.4\pi$	1.59	20.51	0.41π	0.39π	1.00	0.99
$\theta_1=0.6\pi, \theta_2=0.4\pi$	1.59	20.50	0.61π	0.41π	0.98	0.97
$\theta_1=0.2\pi, \theta_2=0.3\pi$	1.60	20.53	0.20π	0.27π	1.00	1.06

注: f', θ', A' 分别为频率、相角、幅值的计算值,其中 f' 为 f_0 的倍数;下标 1、2 分别代表 2 个谐波分量;表 2 同。

表 2 普通 IFFT 计算结果

Tab.2 Computed results using traditional IFFT

初相角	f'_1	f'_2	θ'_1	θ'_2	A'_1	A'_2
$\theta_1=0.4\pi, \theta_2=0.4\pi$	1.18	20.26	0.18π	0.36π	0.70	0.72
$\theta_1=0.6\pi, \theta_2=0.4\pi$	1.21	20.50	0.03π	0.40π	1.07	0.92
$\theta_1=0.2\pi, \theta_2=0.3\pi$	1.22	20.27	0.45π	0.46π	0.81	0.75

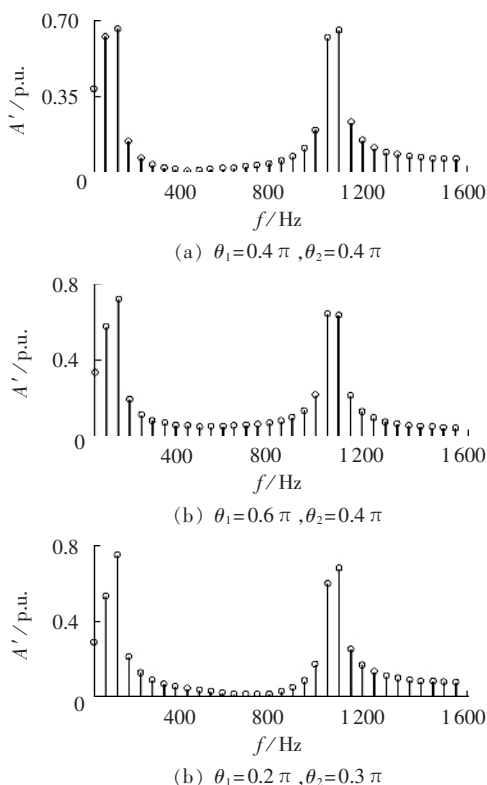


图 3 FFT 计算结果

Fig.3 Computed results using FFT

从计算结果看,由于图 3 中的 FFT 分析结果(幅值)不同,从而普通 IFFT 的计算结果也有较大差别,而且由于 N 值取值较小,导致它的计算误差非常大,如表 2 所示。计算出的频率、幅值及相角和原始信号相比,出入较大;而本文导出的高精度 IFFT 算法的计算结果还是令人满意的,如表 1 所示。它受 θ_1 、 θ_2 变化的影响较小,而且在如此小的 N 值下,计算精度仍较高,可以精确地求出信号中 2 个谐波分量的频率、幅值及相角。

4 结论

导出的高精度 IFFT 算法只利用了一个简化条件(式(5)),而此简化条件对分析结果的影响甚微,所以此 IFFT 算法的精度还是得到了保证。而普通 IFFT 算法把复正弦的分析结果直接套用到实正弦之上,没有考虑信号的相角,就有可能造成较大的误差,文中的分析结果也证实了这一点。

此高精度 IFFT 算法和普通的 IFFT 算法相比,主要是解决了信号相角引起的误差问题,而且改进的 IFFT 并没有明显增加计算量,使得利用 IFFT 检测电网中间谐波的能力极大提高。

参考文献:

- [1] 中国国家技术监督局. GB/T 14549-93 电能质量公用电网谐波[S]. 北京:中国标准出版社,1994.
- [2] AGREZ D. Weighted multipoint interpolated DFT to improve amplitude estimation of multifrequency signal[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,2002,51(2):287-292.

- [3] BORKOWSKI J. LIDFT — the DFT linear interpolation method[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2000,49(4):741-745.
- [4] ZHANG Fu-sheng, GENG Zhong-xing, YUAN Wei. The algorithm of interpolating windowed FFT for harmonic analysis of electric power system[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2001,16(2):160-164.
- [5] HIDALGO R M, FERNANDEZ J G, RIVERA R R, et al. A simple adjustable window algorithm to improve FFT measurements[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2002,51(1):31-36.
- [6] LEONOWICZ Z, LOBOS T, REZMER J. Advanced spectrum estimation methods for signal analysis in power electronics[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2003,50(3):514-519.
- [7] FESSLER J A, SUTTON B P. Nonuniform fast Fourier transforms using min-max interpolation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003,51(2):560-574.
- [8] GALLO D, LANGELLA R, TESTA A. Desynchronized processing technique for harmonic and interharmonic analysis[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2004,19(3):993-1001.
- [9] YANG Jun-zhe, YU Chi-shan, LIU Chih-wen. A new method for power signal harmonic analysis[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2005,20(2):1235-1239.
- [10] 王燕, 张俊敏, 刘开培. 基于虚拟仪器的谐波检测研究[J]. 电力自动化设备, 2005,25(3):30-33.
- WANG Yan, ZHANG Jun-min, LIU Kai-pei. Research of harmonic measuring based on virtual instrument[J]. Electric Power Automation Equipment, 2005,25(3):30-33.
- [11] 徐志向, 侯世英, 周林, 等. 基于奇异值分解的电力系统谐波状态估计[J]. 电力自动化设备, 2006,26(11):28-31.
- XU Zhi-xiang, HOU Shi-ying, ZHOU Lin, et al. Power system harmonic state estimation based on singular value decomposition[J]. Electric Power Automation Equipment, 2006,26(11):28-31.
- [12] 何英杰, 邹云屏, 刘飞, 等. 一种改进自适应谐波检测算法研究[J]. 电力自动化设备, 2006,26(9):23-26.
- HE Ying-jie, ZOU Yun-ping, LIU Fei, et al. Improved adaptive algorithm of harmonic current detection[J]. Electric Power Automation Equipment, 2006,26(9):23-26.
- [13] FELDER M D, MASON J C, EVANS B L. Efficient dual-tone multifrequency detection using the nonuniform discrete Fourier transform[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1998,5(7):160-163.
- [14] 徐淑珍, 刘晓冬, 陈陈, 等. 基于局部余弦变换的电力系统时变谐波分析新方法[J]. 中国电机工程学报, 2001,21(12):12-15.
- XU Shu-zhen, LIU Xiao-dong, CHEN Chen, et al. A new method of time-varying harmonic analysis in power system based on local cosine transform[J]. Proceedings of the CSEE, 2001,21(12):12-15.
- [15] 胡广书. 数字信号处理[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.

(责任编辑:李育燕)

作者简介:

黄方能(1976-),男,广西桂林人,博士研究生,研究方向为电力系统在线监测、FACTS在电力系统中的应用(E-mail: huangfn@sju.edu.cn);

黄成军(1970-),男,浙江奉化人,副教授,博士,研究方向为大型电气设备在线监测和故障诊断技术;

陈陈(1936-),女,上海人,教授,博士,研究方向为电力系统分析、运行和控制;

江秀臣(1965-),男,山东菏泽人,教授,博士,研究方向为高电压绝缘技术及绝缘在线监测、自动化设备。

Improved high precision interpolating FFT for harmonic analysis

HUANG Fang-neng, HUANG Cheng-jun, CHEN Chen, JIANG Xiu-cheng

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Errors in IFFT(Interpolating Fast Fourier Transform) are analyzed and the signal phase is demonstrated as the main cause. It is pointed out that the algorithm applied to complex signal could not be applied to real signal. A high precision IFFT algorithm is thus presented, which corrects the spectrum of FFT to improve its precision based on FFT. Using the useful information of FFT and considering the spectrum difference between complex signal and real signal, it adopts a series of math transforms to overcome the influence of signal phase. As a result, the precision of harmonic analysis is improved without obvious increase of calculating time. Since the complex iteration and special data sampling are not necessary, the requirements for hardware are not strict in implementation. The precise magnitude, phase and frequency of harmonic components in real signal are achieved by analysis. An instance verifies its correctness and higher precision.

Key words: harmonic; IFFT; phase