

# 互联系统 ISS 的积分-积分判据及独立系统应用实例

秦博宇,张雪敏,魏东宁

(清华大学 电机系 电力系统及发电设备控制和仿真国家重点实验室,北京 100084)

**摘要:** 输入-状态稳定(ISS)理论可以根据子系统的稳定属性来判断互联系统的稳定属性,这为分析拓扑多变的独立电力系统稳定性提供了便利。该目标的实现需要2个前提:获得设备的ISS/输入-输出稳定 IOS)属性;得到互联系统稳定的判定条件。鉴于ISS定义式的等价形式(积分-积分判据)能够更加准确地刻画设备的ISS属性,推导了在积分-积分判据定义下的互联系统局部IOS定理。该定理使得互联系统稳定性判定只需要在事先获得的设备ISS/IOS属性的基础上判断2个代数不等式,即小增益条件和局部稳定条件。通过PSCAD仿真软件对发电机与电动机互联系统进行了稳定性分析,仿真结果验证了理论分析的正确性。

**关键词:** 输入-状态稳定; 输入-输出稳定; 积分-积分判据; 电力设备; 互联系统; 稳定性

**中图分类号:** TM 712

**文献标识码:** A

**DOI:** 10.3969/j.issn.1006-6047.2014.05.007

## 0 引言

广义上,研究动态系统稳定性的方法有状态空间法<sup>[1]</sup>和算子法<sup>[2]</sup>2类。状态空间法通常与Lyapunov联系在一起,采用几何和拓扑等理论工具,研究无外部输入激励的情况下非线性系统的动态响应。算子法由George Zames提出<sup>[3-4]</sup>,经Sandberg、Willems、Safonov等人发展<sup>[5-8]</sup>,以系统输入/输出映射为研究对象,采用Hilbert或Banach空间分析等理论工具,令许多线性系统性质得以拓展到非线性系统。

Lyapunov稳定理论是研究和分析系统稳定性的一种非常重要的理论,主要适用于分析系统在初值给定且不含输入情况下的稳定性。该理论是电力系统中基于暂态能量函数方法的理论基础,其中系统的瞬时扰动被转化为故障清除后系统的初值。利用暂态能量函数以及临界能量,可以根据扰动后系统初值方便地判断稳定性,并能够给出系统稳定的裕度。独立电力系统中设备模型复杂,因此暂态能量函数的构造存在困难。文献[9]将半张量积方法推广和应用于独立电力系统暂态稳定分析问题,通过多项式近似系统可自动求解独立电力系统的稳定域。然而,独立电力系统不仅单个设备模型复杂,而且为保证系统可靠性等设置的网络重构措施使得独立电力系统的拓扑结构多变。如果采用Lyapunov稳定的思路,则需要在系统结构变化后重新计算稳定平衡点,更新能量函数和临界能量。再考虑到存在外部持续扰动的因素,采用Lyapunov稳定理论分析独立电

力系统存在诸多不便<sup>[10]</sup>。

1989年,Eduardo D. Sontag和Y Wang等学者提出了输入-状态稳定(ISS)理论,将状态空间稳定理论与输入-输出稳定 IOS)理论相结合来分析稳定属性的变化规律,提供了通过子系统的稳定属性判断互联系统的稳定属性的方法<sup>[11]</sup>。因此在ISS理论应用过程中,重点需要解决子系统ISS属性的计算以及如何通过子系统的ISS属性来分析互联系统的稳定性这2个问题。

对于子系统ISS属性计算,文献[12-13]介绍了一种基于子系统数学模型分析ISS属性的算法,避免了人工观察获得增益函数的主观性。但由于实际系统难以精确建模,并且微分方程形式的数学模型难以考虑实际系统中的限幅环节,该方法具有一定的保守性。在文献[14]中给出ISS等价形式——积分-积分判据的基础上,文献[15]指出积分-积分判据对于不同的输入具有较好的适应性,并且其定义中只含有 $K_\infty$ 类函数,估计难度较低。

文献[16-18]对子系统级联后的系统稳定条件、2个子系统以反馈形式连接的互联系统稳定的小增益条件以及更一般的互联系统稳定需要满足的小增益条件进行了研究。文献[19]研究了局部小增益定理,这些工作使ISS理论向实用化迈进了一步,但是局部小增益条件的计算建立在非线性增益函数矩阵之上,计算量较大。文献[13,20]给出了通过子系统的局部ISS属性判断互联系统局部稳定性的定理。由于使用互联系统的线性增益矩阵判断稳定性,并且考虑状态和输出量的运行范围约束,因而比较适合工程应用。本文以独立电力系统为例,将负载的输出统一为电流,将电源输出统一为电压,这使得子系统的ISS或IOS的定义不再依赖其他子系统的状态量或输出量,实现了每个子系统稳定属性分析的解耦。

本文首先基于积分-积分判据,将基于范数定义

收稿日期:2013-09-03;修回日期:2014-03-17

基金项目:国家重点基础研究发展计划(973计划)项目(2013CB-228201);国家自然科学基金资助项目(50907038,51190103)

Project supported by the National Basic Research and Development Program of China(973 Program)(2013CB228201) and the National Natural Science Foundation of China(50907038, 51190103)

的互联系统局部输入-状态稳定(LISS)定理<sup>[13,20]</sup>推广到积分形式;然后利用仿真方法<sup>[15]</sup>求取了发电机以及电动机子系统基于积分-积分判据的稳定属性,并根据仿真得到的子系统稳定属性,利用积分形式的互联系统 LISS 定理判断发电机与电动机互联后的系统的稳定性;最后对互联系统进行仿真,验证理论分析的正确性。

## 1 ISS 的基本概念

### 1.1 LISS 和 LIOS 的定义

定义 1<sup>[14]</sup> 考察系统

$$\dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x},u) \quad (1)$$

若存在  $\beta \in K_L, \gamma^{ISS} \in K_\infty, \rho > 0$ , 对任意  $\|\mathbf{x}_0\| \leq \rho, \|u\| \leq \rho$ , 有:

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, u)| \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|, t) + \gamma^{ISS}(\|u\|) \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$

则称系统(1)LISS。其中,  $\gamma^{ISS}$  为系统(1)的输入-状态增益。

定义 2<sup>[14]</sup> 考察系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, u) \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3)$$

若存在  $\beta \in K_L, \gamma^{IOS} \in K_\infty, \rho > 0$ , 对任意  $\|\mathbf{x}_0\| \leq \rho, \|u\| \leq \rho$  有:

$$|y(t, \mathbf{x}_0, u)| \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|, t) + \gamma^{IOS}(\|u\|) \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

则称系统(3)局部输入-输出稳定(LIOS)。其中,  $\gamma^{IOS}$  为系统(3)的输入-输出增益。

### 1.2 积分能量的定义

由于本文所给出的定理和仿真都是基于积分能量这一概念,因此给出合理的能够满足工程要求的积分能量的定义十分必要。由于工程实际中的保护(电压保护、电流保护、频率保护等)常存在一个稳态运行区间,当系统的状态量在此区间内时,系统可以连续运行;当状态量偏离稳态运行区间时,系统短时间后可能出现失稳,并且状态量偏离程度越大,出现失稳越快。考虑这一工程实际,给出如下积分能量的定义式。

定义 3 设实际系统能够允许运行的稳态运行区间为  $[a, b]$ ,  $u(t)$  为系统的某一状态变量,定义状态变量  $u(t)$  的积分能量为:

$$E_{\tilde{u}(t)} = \int_0^\infty |\tilde{u}(t)| dt \quad (5)$$

$$|\tilde{u}(t)| = \begin{cases} |u(t) - a| & u(t) < a \\ 0 & a \leq u(t) \leq b \\ |u(t) - b| & u(t) > b \end{cases}$$

上述对积分能量的定义能够反映系统在非正常状态下的能量积累过程,后文所提到积分能量均指这一定义。

## 1.3 积分-积分判据

文献[14]指出,如果一个系统,对于其任意的初始状态  $\mathbf{x}_0$  和输入  $u$ , 存在解  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, u)$ , 其中  $t > 0$ , 并且  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, u)$  满足如下积分不等式:

$$\int_0^t \alpha |\mathbf{x}(s)| ds \leq \alpha_0 \|\mathbf{x}_0\| + \int_0^t \gamma |u(s)| ds \quad (6)$$

其中,  $\alpha, \alpha_0, \gamma \in K_\infty$ , 则称系统满足积分-积分判据。

定理 1<sup>[14]</sup> 一个系统是 ISS 的等价于系统满足积分-积分判据。

文献[15]讨论了在研究实际系统 ISS 属性时,  $L_\infty$  范数定义式(2)与积分定义式(6)的差异。指出范数定义式(2)在应用中会有很多不足,如无穷范数仅能反映信号的幅值信息,对不同形式输入信号的适应能力较差,并且  $L_\infty$  范数定义式中的  $\beta$  函数是初值  $\mathbf{x}_0$  和时间  $t$  的双变量函数,在通过仿真方法近似求取时不易拟合等;而积分形式能较好地衡量输入、输出信号的大小,对不同形式的输入信号有较强的适应性,积分能量的概念更能体现工程实际中保护装置的动作条件,并且通过仿真方法求取  $\alpha, \gamma$  函数也更为简便。这些原因促使有必要将基于  $L_\infty$  范数定义式的互联系统 ISS 定理推广到积分形式,以便更好地在工程实际中获得应用。

## 2 积分-积分形式的互联定理

实际系统中的动态子系统一般可用如下微分方程组描述:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \\ \mathbf{y}_i &= h_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^{n_i}$  为子系统  $i$  的状态变量;  $\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i \in \mathbf{R}^{m_i}$  分别为子系统的输入量和输出量;  $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbf{R}^{p_i}$  为由其他子系统提供的外部随机输入扰动。

由上述子系统构成的互联系统可表示为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\omega}_1) \\ f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n, \boldsymbol{\omega}_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\omega}_1) \\ h_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\omega}_2) \\ \vdots \\ h_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n, \boldsymbol{\omega}_n) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$0 = g(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n]^T \in \mathbf{R}^n, n = n_1 + n_2 + \cdots + n_n, \mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n]^T \in \mathbf{R}^m, \mathbf{u} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n]^T \in \mathbf{R}^m, m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 。

互联系统的方程中微分方程式(8)和代数方程式(9)都直接由子系统方程联立得到,而最后一组代

数方程式(10)描述了子系统之间的连接关系。

文献[20]中给出了互联系统 LISS 定理,文献[12-13]也给出了互联系统 LIOS 定理及相关的证明过程,但是这些定理都是基于  $L_\infty$  范数定义形式的。

本文在现有的  $L_\infty$  范数形式互联定理的基础上,将积分定义式(6)引入,并考虑  $\alpha$  和  $\gamma$  函数仅为线性函数,得到如下基于积分-积分判据的互联系统 LIOS 定理。

**定理 2** 当满足以下 4 个条件时,互联系统 LISS 及 LIOS,且局部输入范围由式(17)及  $\int_0^\infty |\tilde{\omega}_i| dt \leq \rho_i$  限定。

**a.** 子系统(7)满足 LISS 和 LIOS 条件式:

$$\int_0^t \alpha_i^{\text{LISS}} |\tilde{x}_i(s)| ds \leq \alpha_{0i}^{\text{LISS}} |\tilde{x}_{0i}| + \int_0^t \gamma_i^{\text{LISS}} |\tilde{u}_i(s)| ds + \int_0^t \varphi_i^{\text{LISS}} |\tilde{\omega}_i(s)| ds \quad i=1,2,\dots,n \quad (11)$$

$$\int_0^t \alpha_i^{\text{LIOS}} |\tilde{y}_i(s)| ds \leq \alpha_{0i}^{\text{LIOS}} |\tilde{x}_{0i}| + \int_0^t \gamma_i^{\text{LIOS}} |\tilde{u}_i(s)| ds + \int_0^t \varphi_i^{\text{LIOS}} |\tilde{\omega}_i(s)| ds \quad i=1,2,\dots,n \quad (12)$$

对于任意的初值  $|\tilde{x}_{0i}| \leq v_i$ , 输入能量  $\int_0^\infty |\tilde{u}_i| dt \leq \tau_i$ ,  $\int_0^\infty |\tilde{\omega}_i| dt \leq \rho_i$  时均成立。式中,  $\alpha$  和  $\gamma$  函数为线性  $K_\infty$  函数,各变量都减去了其正常运行范围的稳态值,所有的积分均按式(5)计算。

**b.** 子系统互联网络约束式(10)存在解:

$$\mathbf{u}_i = s_i(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) \quad i=1,2,\dots,n \quad (13)$$

并且存在  $z_{ij} \in K_\infty$  使得:

$$|\tilde{u}_i(t)| \leq \sum_{j=1,2,\dots,n} z_{ij} (|\tilde{y}_j(t)|) \quad i=1,2,\dots,n \quad (14)$$

**c.** 满足小增益条件:

$$\rho(\mathbf{G}^{\text{IOS}}) < 1 \quad (15)$$

$$\mathbf{G}^{\text{IOS}} = (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \circ \mathbf{Z} =$$

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1^{\text{IOS}})^{-1} \gamma_1^{\text{IOS}} z_{11} & \dots & (\alpha_1^{\text{IOS}})^{-1} \gamma_1^{\text{IOS}} z_{1n} \\ (\alpha_2^{\text{IOS}})^{-1} \gamma_2^{\text{IOS}} z_{21} & \dots & (\alpha_2^{\text{IOS}})^{-1} \gamma_2^{\text{IOS}} z_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n^{\text{IOS}})^{-1} \gamma_n^{\text{IOS}} z_{n1} & \dots & (\alpha_n^{\text{IOS}})^{-1} \gamma_n^{\text{IOS}} z_{nm} \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中,运算符“ $\circ$ ”表示复合函数。

**d.** 满足 LIOS 的条件:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{I}_d - \mathbf{G}^{\text{IOS}})^{-1} [(\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ (\alpha_0^{\text{IOS}})^{-1} |\tilde{x}_0| + (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \int_0^t |\tilde{\omega}(s)| ds] \leq \boldsymbol{\tau} \quad (17)$$

$$|\tilde{x}_0| \leq \mathbf{v}$$

其中,  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$  为系统局部输入范围;  $\mathbf{F}^{\text{IOS}} = [\varphi_1^{\text{IOS}}, \varphi_2^{\text{IOS}}, \dots, \varphi_n^{\text{IOS}}]^T$  为干扰的输入-输出增益;  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$  为系统初值的范围。

证明:首先证明若局部区域存在,则各子系统互联后各自仍然保持 LIOS 和 LISS。

将条件 **a** 中的  $n$  个不等式写成向量和矩阵的形式,得到:

$$\int_0^t \alpha^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{y}}(s)| ds \leq \alpha_0^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{x}}_0| + \int_0^t \mathbf{F}^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{u}}(s)| ds + \int_0^t \mathbf{F}^{\text{IOS}} |\tilde{\boldsymbol{\omega}}(s)| ds \quad i=1,2,\dots,n \quad (18)$$

其中,  $\mathbf{F}^{\text{IOS}} := \text{diag}(\gamma_i), i=1,2,\dots,n$ 。

根据条件 **b**, 存在  $z_{ij} \in K_\infty$  使得对于任意  $t$  式(19)成立:

$$|\tilde{u}_i(t)| \leq \sum_{j=1,2,\dots,n} z_{ij} (|\tilde{y}_j(t)|) \quad i=1,2,\dots,n \quad (19)$$

将式(19)代入式(18)得到:

$$\int_0^t |\tilde{\mathbf{y}}(s)| ds \leq (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{x}}_0| + (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \circ \mathbf{Z} \times \int_0^t |\tilde{\mathbf{y}}(s)| ds + (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \int_0^t |\tilde{\boldsymbol{\omega}}(s)| ds \quad (20)$$

式(20)移项后得到:

$$(\mathbf{I}_d - (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \circ \mathbf{Z}) \int_0^t |\tilde{\mathbf{y}}(s)| ds \leq (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{x}}_0| + (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \int_0^t |\tilde{\boldsymbol{\omega}}(s)| ds \quad (21)$$

由条件 **c** 可知  $\rho(\mathbf{G}^{\text{IOS}}) < 1$ , 因  $(\mathbf{I}_d - \mathbf{G}^{\text{IOS}})^{-1}$  是非减映射,因此由式(21)得:

$$\int_0^t |\tilde{\mathbf{y}}(s)| ds \leq (\mathbf{I}_d - \mathbf{G}^{\text{IOS}})^{-1} [(\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{x}}_0| + (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \int_0^t |\tilde{\boldsymbol{\omega}}(s)| ds] \quad (22)$$

由条件 **d**

$$\mathbf{Z}(\mathbf{I}_d - \mathbf{G}^{\text{IOS}})^{-1} [(\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{x}}_0| + (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \int_0^t |\tilde{\boldsymbol{\omega}}(s)| ds] \leq \boldsymbol{\tau} \quad (23)$$

及式(19)、(21)可知:

$$\int_0^t |\tilde{\mathbf{u}}(s)| ds \leq \mathbf{Z} \int_0^t |\tilde{\mathbf{y}}(s)| ds \leq \mathbf{Z}(\mathbf{I}_d - \mathbf{G}^{\text{IOS}})^{-1} [(\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{x}}_0| + (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \int_0^t |\tilde{\boldsymbol{\omega}}(s)| ds] \quad (24)$$

再考虑到条件 **d** 中要求  $|\tilde{x}_0| \leq \mathbf{v}$ , 可知当定理 2 中的条件成立时,子系统互联后各自仍然保持 LIOS 和 LISS。

以下证明互联系统 LIOS。

现定义映射:

$$\boldsymbol{\gamma}_s^{\text{IOS}} = (\mathbf{I}_d - \mathbf{G}^{\text{IOS}})^{-1} \circ (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \mathbf{F}^{\text{IOS}} \quad (25)$$

$$\alpha_{0,s}^{\text{IOS}} = (\mathbf{I}_d - \mathbf{G}^{\text{IOS}})^{-1} \circ (\alpha^{\text{IOS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{IOS}} \quad (26)$$

由条件 **c** 可知  $(\mathbf{I}_d - \mathbf{G}^{\text{IOS}})^{-1}$  是非减映射,则由式(21)得到:

$$\int_0^t |\tilde{\mathbf{y}}(s)| ds \leq \alpha_{0,s}^{\text{IOS}} |\tilde{\mathbf{x}}_0| + \boldsymbol{\gamma}_s^{\text{IOS}} \int_0^t |\tilde{\boldsymbol{\omega}}(s)| ds \quad (27)$$

其中,  $\gamma_s^{\text{IOS}}, \alpha_{0,s}^{\text{IOS}} \in K_\infty$ 。

可见,满足积分-积分判据,因此互联系统 LIOS。

最后证明互联系统 LISS。

由于条件 **a** 对任意  $t$  成立,即:

$$\int_0^t \alpha_i^{\text{ISS}} |\tilde{x}_i(s)| ds \leq \alpha_{0i}^{\text{ISS}} |\tilde{x}_{0i}| + \int_0^t \gamma_i^{\text{ISS}} |\tilde{u}_i(s)| ds + \int_0^t \varphi_i^{\text{ISS}} |\tilde{\omega}_i(s)| ds \quad \forall t \geq 0, i=1, 2, \dots, n$$

将上式中的  $n$  个不等式写成向量和矩阵的形式,得到:

$$\int_0^t \alpha^{\text{ISS}} |\tilde{x}(s)| ds \leq \alpha_0^{\text{ISS}} |\tilde{x}_0| + \Gamma^{\text{ISS}} \int_0^t |\tilde{u}(s)| ds + F^{\text{ISS}} \int_0^t |\tilde{\omega}(s)| ds \quad \forall t \geq 0 \quad (28)$$

由于  $\alpha^{\text{ISS}}$  为  $K_\infty$  函数,式(28)可化为:

$$\int_0^t |\tilde{x}(s)| ds \leq (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{ISS}} |\tilde{x}_0| + (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ \Gamma^{\text{ISS}} \circ Z \int_0^t |\tilde{y}(s)| ds + (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ F^{\text{ISS}} \int_0^t |\tilde{\omega}(s)| ds \quad \forall t \geq 0 \quad (29)$$

将式(27)代入式(29),可得:

$$\int_0^t |\tilde{x}(s)| ds \leq (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{ISS}} |\tilde{x}_0| + (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ F^{\text{ISS}} \int_0^t |\tilde{\omega}(s)| ds + (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ \Gamma^{\text{ISS}} \circ Z \left( \alpha_{0,s}^{\text{IOS}} |\tilde{x}_0| + \gamma_s^{\text{ISS}} \int_0^t |\tilde{\omega}(s)| ds \right) \quad (30)$$

由于上式中均为  $K_\infty$  类函数,那么可以定义映射:

$$\gamma_s^{\text{ISS}} = G^{\text{ISS}} \circ \gamma_s^{\text{IOS}} + (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ F^{\text{ISS}} \quad (31)$$

$$\alpha_{0,s}^{\text{ISS}} = G^{\text{ISS}} \circ \alpha_{0,s}^{\text{IOS}} + (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ \alpha_0^{\text{ISS}} \quad (32)$$

其中,  $G^{\text{ISS}} = (\alpha^{\text{ISS}})^{-1} \circ \Gamma^{\text{ISS}} \circ Z$ 。

可得到:

$$\int_0^t |\tilde{x}(s)| ds \leq \alpha_{0,s}^{\text{ISS}} |\tilde{x}_0| + \gamma_s^{\text{ISS}} \int_0^t |\tilde{\omega}(s)| ds \quad (33)$$

其中,  $\gamma_s^{\text{ISS}}, \alpha_{0,s}^{\text{ISS}} \in K_\infty$ 。

满足积分-积分判据,因此互联系统 LISS。

下文对互联系统稳定性进行分析的依据为积分-积分判据及定理 2。

### 3 仿真分析

利用文献[15]所提出的基于仿真计算子系统 LISS 和 LIOS 属性的方法,分别对发电机和电动机子系统的增益函数进行估计。此处规定,发电机机端电压稳态运行区间为 [0.9, 1.1] p.u., 发电机机端电压不得低于 0.7 p.u. 超过 8 s, 即  $U_{\text{energy}}^{\text{max}} = 1.6$ ; 发电机频率可持续运行区间为 [0.95, 1.05] p.u., 发电机频率不

得低于 0.9 p.u. 超过 10 s, 即  $\omega_{\text{energy}}^{\text{max}} = 0.5$ ; 电动机电流可持续运行范围为 [0, 1] p.u., 电动机电流不得高于 4 p.u. 超过 10 s, 即  $I_{\text{energy}}^{\text{max}} = 30$ 。

#### 3.1 发电机子系统的 LIOS 属性

表 1 为发电机子系统的输入-输出增益。

表 1 发电机子系统的输入-输出增益

Tab.1 Input-to-output gain of generator subsystem

$\int_0^t  \tilde{u}(s)  ds$	$\int_0^t  \tilde{y}(s)  ds$	$\gamma \approx \frac{\int_0^t  \tilde{y}(s)  ds}{\int_0^t  \tilde{u}(s)  ds}$
$2/\sqrt{2}$	0.3958	0.2798
$4/\sqrt{2}$	0.7216	0.2551
$6/\sqrt{2}$	0.9725	0.2292
$8/\sqrt{2}$	1.1471	0.2028
$12/\sqrt{2}$	1.4250	0.1680
$14/\sqrt{2}$	1.9450	—

由表 1 数据知,当  $\int_0^t |\tilde{u}(s)| ds = 14/\sqrt{2}$  时,

$\int_0^t |\tilde{y}(s)| ds = 1.945 > U_{\text{energy}}^{\text{max}} = 1.6$ , 输出的积分能量超过临界能量,系统失稳。

仿真估计得到的输入-输出增益  $\gamma_g \approx 0.2798$ , 输入范围  $\tau_1 \approx 8.5$ 。

下面计算线性  $K_\infty$  函数  $\alpha_0$ 。将积分-积分判据移项得下式:

$$\alpha_0 |x_0| \geq \int_0^t |y(s)| ds - \gamma \int_0^t |u(s)| ds$$

发电机初值通过改变负载电阻的大小来调整,考虑发电机轻载、重载等典型工况,分别计算负载率

为 0.2、0.5、0.8 时输入输出的能量差  $\int_0^t |y(s)| ds -$

$\gamma \int_0^t |u(s)| ds$ , 并计算函数  $\alpha_0$ 。仿真得  $\alpha_0$  的比例系数为一非常接近 0 的负数,由于  $\alpha_0$  为  $K_\infty$  函数,因此将  $\alpha_0$  的比例系数近似取为一接近 0 的正数。此算例中,取  $\alpha_0 |x_0| \approx 10^{-6} |x_0|$ 。

根据仿真分析得到此发电机子系统积分-积分形式估计为:

$$\int_0^t |U(t) - U_e| dt \leq 10^{-6} |x_0| + 0.2798 \int_0^t |I(t) - I_e| dt$$

输入范围:

$$\int_0^t |I(t) - I_e| dt \leq \tau_1 \approx 8.5$$

#### 3.2 电动机子系统的 LIOS 属性

表 2 为电动机子系统的输入-输出增益。

电动机电流基值为 0.114 kA, 将标么值下的能量上限换算为有名值,得  $I_{\text{energy}}^{\text{max}*} = 30 \times 0.114 = 3.42$ 。由表 2 数据知,当  $\int_0^t |\tilde{u}(s)| ds = 13.4398$  时,  $\int_0^t |\tilde{y}(s)| ds =$

表 2 电动机子系统的输入-输出增益

Tab.2 Input-to-output gain of motor subsystem

$\int_0^t  \bar{u}(s)  ds$	$\int_0^t  \bar{y}(s)  ds$	$\gamma \approx \frac{\int_0^t  \bar{y}(s)  ds}{\int_0^t  \bar{u}(s)  ds}$
0.5376	0.1397	0.2599
2.6879	0.6446	0.2398
5.9135	1.4355	0.2427
8.0639	1.9867	0.2464
11.2894	2.8472	0.2522
13.3323	3.4135	0.2560
13.4398	3.4440	—

$3.444 > I_{\text{energy}}^{\text{max}} = 3.42$ , 输出的积分能量超过临界能量, 系统失稳。

仿真估计得到的输入-输出增益  $\gamma_m \approx 0.2599$ , 输入范围  $\tau_2 \approx 13.3323$ 。

下面计算  $K_{\infty}$  函数  $\alpha_0$ 。

电动机的初值通过电动机转速控制模式给定的转速值来调节。在工程实际中, 主要关心的是电动机接近停转接入及接近额定转速接入对系统的影响, 所以这里对  $\omega$  取 0、0.1、0.9、0.98 p.u. 这 4 种情况进行计算。

仿真计算得到不同初值下的  $\alpha_0$  函数值见表 3。

表 3 不同  $|x_0|$  下的  $\alpha_0$  函数值Tab.3  $\alpha_0$  value for different  $|x_0|$  values

初值 $ x_0 $	$\alpha_0$
0.02	0.005
0.1	0.077
0.9	3
1.0	3.5

此处近似估计  $\alpha_0$  函数的具体形式如下:

$$\alpha_0 |x_0| \approx 3.57 \times |x_0|^{1.66} \quad (34)$$

故电动机子系统的积分-积分形式估计为:

$$\int_0^t |I(t) - I_e| dt \leq \alpha_0 |x_0| + 0.2599 \int_0^t |U(t) - U_e| dt$$

其中,  $\alpha_0 |x_0|$  根据电动机的初始状态由式(34)取值。

输入范围为:

$$\int_0^t |U(t) - U_e| dt \leq \tau_2 \approx 13.3323$$

### 3.3 子系统输入-输出增益的保守性分析

定理 2 中稳定判据所用的子系统输入-输出增益均为理论值, 该判据是互联系统稳定的充分条件。本文通过仿真估计子系统的输入-输出增益, 不能考虑到所有类型的输入, 同时由于仿真的误差等, 估计的输入-输出增益值必然会小于理论值, 为避免稳定分析结果不是偏保守而是偏乐观, 需要给仿真估计的输入-输出增益乘以一个大于 1 的裕度系数  $k$ 。本文假设裕度系数  $k=1.05$ 。于是, 发电机输入输出增益  $\gamma'_g=0.2938$ 、电动机输入-输出增益  $\gamma'_m=0.2729$ 。

### 3.4 发电机-电动机耦合系统稳定性分析

第 3.1、3.2 节通过仿真计算分别得到了发电机和电动机子系统 IOS 属性的相关参数。本节将给出几个简单算例, 首先利用定理 2 及计算得到的子系统的稳定属性从理论上分析算例中互联系统的稳定属性, 然后再通过 PSCAD 仿真软件对算例中的互联系统进行仿真, 并将仿真结果与理论分析结果对比。

#### 3.4.1 理论分析

算例 1: 1 台发电机带  $n$  台电动机并联运行 (发电机和电动机相关参数和稳定属性同第 3.1、3.2 节),  $n$  台电动机均接近停转接入 ( $\omega_0=0.1$  p.u.), 分析系统可以稳定运行临界带负载数量。

利用 MATLAB 编写程序, 计算得到当  $n=3$  时系统失稳, 具体分析如下。

a. 发电机与电动机子系统的 IOS 属性已计算得到, 故定理 2 中条件 a 满足。

b. 将 3 台电动机并接入发电机, 有:

$$\begin{cases} I_g = I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} \\ U_{m1} = U_g \\ U_{m2} = U_g \\ U_{m3} = U_g \end{cases}$$

故:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

条件 b 成立。

c. 计算增益矩阵得:

$$G^{\text{IOS}} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_g & \gamma_g & \gamma_g \\ \gamma_m & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_m & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据第 3.3 节得到的  $\gamma'_g=0.2938$ ,  $\gamma'_m=0.2729$ , 知  $\rho(G^{\text{IOS}})=0.4904 < 1$ , 故条件 c 满足。

d. 计算得到:

$$Z(I_d - G^{\text{IOS}})^{-1} \alpha_0 |x_0| = \begin{bmatrix} 11.85 \\ 3.4815 \\ 3.4815 \\ 3.4815 \end{bmatrix} > \tau = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 13.3323 \\ 13.3323 \\ 13.3323 \end{bmatrix}$$

故条件 d 不满足, 系统不能维持稳定运行。

算例 2: 1 台发电机带  $n$  台电动机并联运行 (发电机和电动机相关参数和稳定属性同算例 1),  $n$  台电动机接近额定运行转速接入 ( $\omega_0=0.9$  p.u.), 分析系统可以稳定运行临界带负载数量。

利用 MATLAB 编写程序, 计算得到当  $n=12$  时系统失稳, 具体分析如下。

a. 发电机与电动机子系统的 IOS 属性已计算得

到,故定理 2 中条件 a 满足。

b. 将 12 台电动机并联接入发电机,有:

$$\begin{cases} I_g = I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} + \dots + I_{m12} \\ U_{m1} = U_g \\ U_{m2} = U_g \\ \vdots \\ U_{m12} = U_g \end{cases}$$

故:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

条件 b 成立。

c. 计算增益矩阵得:

$$G^{IOS} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_g & \dots & \gamma_g \\ \gamma_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

根据第 3.3 节得到的  $\gamma'_g = 0.2938$ 、 $\gamma'_m = 0.2729$ , 知  $\rho(G^{IOS}) = 0.9809 < 1$ , 故条件 c 满足。

d. 计算得到:

$$Z(I_d - G^{IOS})^{-1} \alpha_0 |x_0| = \begin{bmatrix} 24.371 \\ 7.1599 \\ 7.1599 \\ \vdots \\ 7.1599 \end{bmatrix} > \tau = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 13.3323 \\ 13.3323 \\ \vdots \\ 13.3323 \end{bmatrix}$$

条件 d 不满足,系统不能维持稳定运行。

综上所述,电动机接近停转接入时的临界带负载数量为 3 台,电动机接近额定转速接入时的临界带负载数量为 12 台。

### 3.4.2 仿真验证

利用 PSCAD 仿真软件搭建 1 台发电机带多台电动机的仿真模型,令电动机初始接近停转或接近额定转速,在某一时刻(本文使用的仿真模型为 15 s 将电动机接入)接入发电机,观察发电机转速、发电机机端电压、电动机转差率等物理量的变化,判断系统能否维持稳定运行。通过计算发电机临界带负载数目与 3.4.1 节中的理论分析进行对比。

当电动机初始转速接近停转( $\omega_0 = 0.1$  p.u.)时,经过仿真分析,带 3 台电动机时系统失稳,各个状态变量(均为标么值)波形如图 1 所示。

由上面的仿真曲线可以看出,3 台电动机初始转速均为  $\omega_0 = 0.1$  p.u. 时,15 s 接入发电机,发电机转速、机端电压均接近 0,电动机转差率接近于 1,系统不能够维持稳定运行。而接入 2 台电动机时系统稳定,因此临界带负载数目为 3 台电动机,与理论分析一致。

当电动机初始转速接近额定转速( $\omega_0 = 0.9$  p.u.)

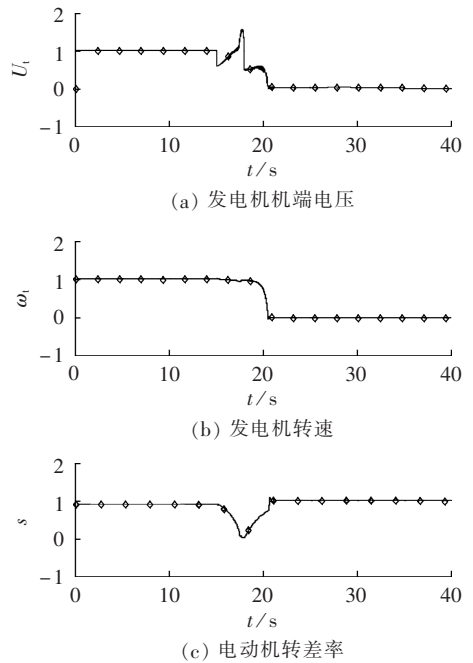


图 1 电动机  $\omega_0 = 0.1$  p.u. 接入时的仿真波形  
Fig.1 Simulative curves when  $\omega_0 = 0.1$  p.u.

时,经过仿真分析,带 13 台电动机时系统失稳,各个状态变量(均为标么值)波形如图 2 所示。

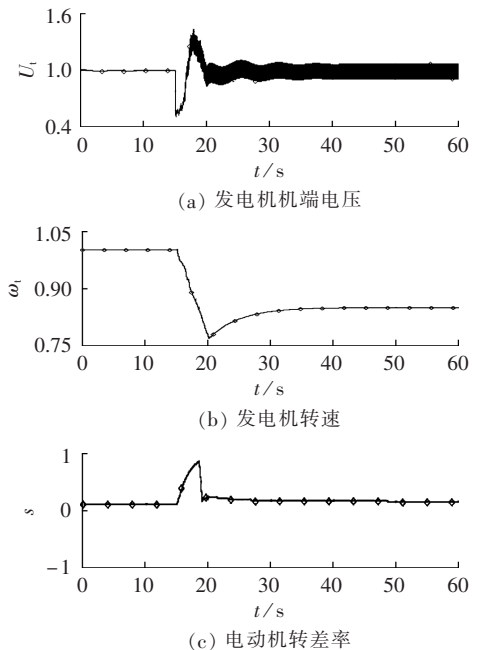


图 2 电动机  $\omega_0 = 0.9$  p.u. 接入时的仿真波形  
Fig.2 Simulative curves when  $\omega_0 = 0.9$  p.u.

由上面的仿真曲线可以看出,13 台电动机初始转速均为  $\omega_0 = 0.9$  p.u. 时,发电机转速最终维持在 0.85 p.u. 附近,根据计算子系统 IOS 属性时的稳定条件,即发电机转速不得低于 0.9 p.u. 超过 10 s。因此,此时互联系统失稳。而接入 12 台电动机时系统稳定,因此临界稳定带负载数目为 13 台电动机,略大于理论计算的临界带负载数目。

## 4 结论与展望

由于 ISS 的等价定义(积分-积分判据)具有更好的适应性,本文推导了在积分-积分判据定义下的互联系统 LIOS 定理。利用该定理计算了发电机允许接入近额定转速和接近堵转电动机的台数,通过仿真验证了理论分析的正确性。

运用该方法,可以离线计算子系统的 ISS/IOS 属性,利用计算所得的子系统稳定属性在线判断互联系统稳定性,不需要复杂计算,仅需要验证是否满足互联系统的稳定条件。与传统的时域仿真或 Lyapunov 方法相比,更适合拓扑结构多变的独立电力系统;并且离线测定子系统稳定属性时不需要建立微分方程模型,避免了参数测定等问题。

本文所提出的方法是基于动态设备的状态变量和输出来判断系统稳定属性的,因此不适用于大系统的功角稳定,但可以用于微电网孤网运行、独立电网的稳定判断等方面。

本文中对增益函数  $\gamma$  进行估计时采用了线性函数形式,会存在一定的误差,进一步可以采用分段线性化或多项式函数等优化增益函数。此外,还需进一步研究合理选择裕度系数的方法,以降低分析的保守性。

### 参考文献:

- [1] KALMAN R E, BERTRAM J E. Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov, paths I and II [J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82: 371-400.
- [2] ZAMES G. Nonlinear operators for system analysis [R]. Cambridge, USA: MIT Research Lab of Electronics, 1960.
- [3] ZAMES G. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part I: conditions using concepts of loop gain, conicity, and positivity [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, AC-11: 228-238.
- [4] ZAMES G. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part II: conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, AC-11: 465-476.
- [5] SANDBERG I W. On the  $L_2$ -boundedness of solutions of nonlinear functional equations [J]. Bell System Technical Journal, 1964, 43: 1581-1599.
- [6] SANDBERG I W. On the properties of systems that distort signals II [J]. Bell System Technical Journal, 1964, 43: 91-112.
- [7] WILLEMS J C. Stability theory of dynamical systems [M]. New York, USA: Wiley, 1970.
- [8] SAFONOV M G. Robustness and stability aspects of stochastic multivariable feedback system design [D]. Cambridge, USA: MIT, 1977.
- [9] 梅生伟, 刘锋, 薛安成. 电力系统暂态分析中的半张量积方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2010: 179-208.
- [10] 张雪敏, 陈来军, 梅生伟. 输入状态稳定理论及其独立电力系统

应用 [J]. 电工电能新技术, 2012, 31(4): 58-61, 70.

- ZHANG Xuemin, CHEN Laijun, MEI Shengwei. Input-to-output stability theory and its application on isolated power system [J]. Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy, 2012, 31(4): 58-61, 70.
- [11] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(4): 435-443.
  - [12] WU Shengyu, MEI Shengwei, ZHANG Xuemin. Estimation of LISS (Local Input-to-State Stability) properties for nonlinear systems [J]. Science China Technological Sciences, 2010, 53: 909-917.
  - [13] 伍声宇. 独立电力系统的 ISS 稳定性分析 [D]. 北京: 清华大学, 2010.  
WU Shengyu. ISS analysis of isolated power systems [D]. Beijing: Tsinghua University, 2010.
  - [14] SONTAG E D. Input to state stability: basic concepts and results [J]. Nonlinear and Optimal Control Theory, 2008, 1932: 163-220.
  - [15] 秦博宇, 张雪敏, 魏东宁. 基于积分-积分判据的电力设备 IOS 分析及应用实例 [J]. 电力自动化设备, 2014, 34(4): 1-7, 12.  
QIN Boyu, ZHANG Xuemin, WEI Dongning. IOS analysis of electric power equipment based on integral-integral estimate and application [J]. Electric Power Automation Equipment, 2014, 34(4): 1-7, 12.
  - [16] JIANG Z P, TEEL A, PRALY L. Small-gain theorem for ISS systems and applications [J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 1994(7): 95-120.
  - [17] POTRYKUS H G. An idempotent-analytic ISS small gain theorem with applications to complex process models [D]. Austin, USA: University of Texas at Austin, 2002.
  - [18] DASHKOVSKIY S, RUFFER B S, WIRTH F R. A small-gain type stability criterion for large scale networks of ISS systems [C] // 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. [S.l.]: IEEE, 2005: 5633-5638.
  - [19] DASHKOVSKIY S N, RUFFER B S, WIRTH F R. Numerical verification of local input-to-state stability for large networks [C] // Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA: [s.n.], 2007: 4471-4476.
  - [20] WANG Guanqun, ZHANG Xuemin, MEI Shengwei. Input-to-output stability analysis of interconnecting microgrids [C] // 4th International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies (DRPT), 2011. Weihai, China: IEEE, 2011: 1097-1103.

### 作者简介:



秦博宇

秦博宇(1989-),男,陕西西安人,博士研究生,从事电力系统分析与控制方面的研究(E-mail: qinboyu11@126.com);

张雪敏(1979-),女,陕西大荔人,副教授,从事电力系统稳定与控制方面的研究;

魏东宁(1991-),女,河北承德人,硕士研究生,从事电力系统稳定与控制方面的研究。

(下转第 66 页 continued on page 66)

中的应用研究[J]. 中国电机工程学报,2005,25(5):38-43.

HE Zhengyou,CAI Yumei,QIAN Qingquan. A study of wavelet entropy theory and its application in electric power system fault detection[J]. Proceedings of the CSEE,2005,25(5):38-43.

[16] 束洪春,彭仕新. 利用全频带综合小波能量相对熵的配网故障选线方法[J]. 高电压技术,2009,35(7):60-64.

SHU Hongchun,PENG Shixin. Distribution network fault line detection using the full waveband complex relative entropy of wavelet energy[J]. High Voltage Engineering,2009,35(7):60-64.

作者简介:



郭谋发

郭谋发(1973-),男,福建福清人,副教授,硕士,研究方向为电力系统自动化(E-mail: gmf@fzu.edu.cn);

高源(1988-),男,福建平潭人,硕士研究生,研究方向为配电网自动化;

杨耿杰(1966-),男,福建武夷山人,教授,研究方向为电力系统分析。

## Faulty line detection based on transient waveform difference recognition for resonant earthed system

GUO Moufa,GAO Yuan,YANG Gengjie

(College of Electrical Engineering and Automation,Fuzhou University,Fuzhou 350108,China)

**Abstract:** When single-phase grounding fault occurs in resonant earthed system,the transient zero-sequence current waveform difference between faulty line and healthy line is bigger than that between healthy lines, based on which,an approach of faulty line detection is put forward. The wavelet packet decomposition, reconstruction and information enhancement are carried out for the fault transient zero-sequence current waveform of each line and the amount of time windows is determined for each frequency band according to its size. The distribution feature matrixes of each time window and its relative entropy are calculated and then used to recognize the waveform difference degree among the same time window of different lines. The faulty line is then picked out by the equal weight voting from the candidate faulty lines selected during waveform difference recognition for different time windows. Substantial simulative results show its accuracy and reliability.

**Key words:** faulty line detection; wavelet packet transform; relative entropy; waveform difference recognition; equal weight voting; resonant; electric grounding

(上接第52页 continued from page 52)

## Integral-integral estimate of interconnected system ISS and its applications in isolated system

QIN Boyu,ZHANG Xuemin,WEI Dongning

(State Key Lab of Control and Simulation of Power Systems and Generation Equipments, Department of Electrical Engineering,Tsinghua University,Beijing 100084,China)

**Abstract:** ISS(Input-to-State Stability) theory judges the stability of interconnected system according to the stabilities of its subsystems,which can be properly used in the stability analysis of isolated power system with variable topology. Two premises are necessary:acquiring the ISS/IOS(Input-to-Output Stability) property of equipment;obtaining the stability criterion of interconnected system. Because the integral-integral estimate, the equivalent form of ISS definition,can more accurately define the ISS property of equipment,the local IOS theorem for interconnected system is deduced under the integral-integral estimate definition,which detects the stability of interconnected system by judging only two algebraic inequalities based on the acquired ISS/IOS property of equipment;the small gain condition and the locally stable condition. The stability of an interconnected system with generator and motor is analyzed with PSCAD simulation software and the simulative results verify the correctness of theoretical analysis.

**Key words:** input-to-state stability; input-to-output stability; integral-integral estimate; electric power equipment; interconnected system; stability