

计及随机小扰动影响下的多机系统稳定性分析

王 芮,王 杰,弥 潇

(上海交通大学 电子信息与电气工程学院,上海 200240)

摘要: 随着风力、太阳能等可再生能源发电的大规模并网,系统中的随机因素不断增多,传统的确定型线性化稳定性分析方法急需得到改善。采用含随机扰动项的非线性系统模型分析多机电力系统在随机扰动下的随机稳定性,利用 Itô 随机微分方程的相关理论分析了多机系统功角和角速度在 Gauss 随机小扰动下的均值稳定性和均方稳定性,并在 MATLAB/Simulink 中分别对 4 机 11 节点系统和 16 机 68 节点系统进行了仿真计算,通过对系统在随机小扰动下的响应曲线进行分析,验证了理论证明的正确性。

关键词: 多机系统; 随机扰动; Itô 微分方程; 稳定性

中图分类号: TM 712

文献标识码: A

DOI: 10.16081/j.issn.1006-6047.2017.02.025

0 引言

电力系统本身是一个非线性的动态网络,存在着诸多的随机扰动现象,如负荷的随机波动、原动机扭矩的随机振动、互联电网联络线上功率的随机变化等。此外,随着当代电网技术的不断发展,电动汽车^[1]不断推广,大量风力、太阳能等可再生能源发电并入电网,这些都给原有的电力系统带来更多的随机干扰^[2-7]。随着随机扰动的不断增多,传统的确定型稳定性分析方法急需得到改善,因此如何在随机扰动下进行非线性电力系统的稳定性分析显得尤为重要。相较于传统的确定型方法,本文在多机系统原有微分方程中加入了随机外部激励,采用合理的近似假设并将理论与实际相结合,全面地分析了多机系统在受到随机小扰动后的稳定情况,拓宽了随机微分方程在多机系统功角及角速度稳定分析中的应用。

电力系统中的随机扰动一般分为三大类:初值的随机性、系统参数的随机性和外部激励的随机性,前两者在动态分析的过程中都是确定的常数,而第三类则是时变的。在现有的研究中,前 2 类随机扰动大都可通过概率的方法得到解决;而关于外部激励的随机性分析,目前的研究资料还较少。文献[8]基于单机无穷大系统的简单线性化模型进行了高斯(Gauss)随机小激励下系统的稳定性研究;文献[9]通过引入随机微分方程,建立了系统的非线性模型,对单机无穷大系统进行了 Gauss 白噪声小扰动下的随机稳定性分析。本文在文献[9]的基础上进一步分析研究多机系统在随机小扰动下的功角、角速度稳定性。

本文采用的模型是在确定型非线性模型的基础

上加入随机扰动项后确立的模型,随机激励可以理解为由可再生能源发电或电动汽车等负荷产生的随机功率波动,因为在较短的时间内随机激励一般围绕某一均值波动,故这些波动在一般情况下可近似假设为 Gauss 过程^[8,10-11]。本文利用伊藤(Itô)随机微分方程的相关性质证明了 Gauss 随机小扰动下多机系统功角和角速度的均值稳定性和均方稳定性,分别对 4 机 11 节点系统和 16 机 68 节点系统在 Gauss 随机小扰动下进行了仿真分析,并将理论证明与仿真结果进行了对比分析,验证了本文理论分析方法的合理性。

1 随机微分方程

1.1 随机过程

随机过程^[12]主要有独立增量过程、Gauss 过程和维纳(Wiener)过程等。

对随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ($T=[0, \infty)$ 为时间段),若对任意 n 个 $t_i (i=1, 2, \dots, n; t_i \in T)$ 且 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 随机过程的增量 $X(t_2) - X(t_1)$ 、 $X(t_3) - X(t_2)$ 、 $\dots$ 、 $X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立,则称 $X(t)$ 为独立增量过程,若增量的概率分布只依赖于时间差,则称该随机过程 $X(t)$ 为齐次独立增量过程。

若随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 满足:①对于 $\forall t > 0$, 有 $X(t) \sim N(0, \sigma^2)$;②若随机过程中 $\forall t_1, t_2 > 0$ 且 $t_1 \neq t_2$, $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 相互独立,则称随机过程 $X(t)$ 为 Gauss 过程。若 $\sigma^2=1$, 则称该随机过程 $X(t)$ 为标准 Gauss 过程。

若随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 满足:① $X(0)=0$;② $X(t)$ 是一个齐次独立增量过程,且 $\Delta X_n = X(t_{n+1}) - X(t_n)$, $\Delta X_n \sim N(0, \Delta t_n)$;③对 $\forall t > 0$, $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$, 则称随机过程 $X(t)$ 为 Wiener 过程。若 $\sigma^2=1$, 则称该随机过程 $X(t)$ 为标准 Wiener 过程。Wiener 过程的形式导数具有 Gauss 过程的性质,因此该形式导数可写为:

$$dB(t) = W(t)dt$$

收稿日期:2016-03-18;修回日期:2016-11-03

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61374155);高校博士点专项科研基金资助项目(20130073110030)

Project supported by the National Natural Science Foundation of China(61374155) and Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education(20130073110030)

其中, $W(t)$ 为 Gauss 过程; $B(t)$ 为 Wiener 过程。

1.2 Itô 微分方程

Itô 微分方程^[13-14]是一类在控制论、滤波和通信理论中有着重要作用的随机微分方程,其表述为:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t) + G(X(t), t)W(t) \quad (1)$$

其中, $X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]^T$ 为 n 维向量随机状态变量, $t \in [t_0, T]$; $X(t_0) = X_0$; $W(t)$ 为 m 维向量随机过程,其分量为 Gauss 过程; X_0 与 $W(t)$ 独立。式(1)所示随机微分方程的积分形式为:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s), s)ds + \int_0^t G(X(s), s)dB(s) \quad (2)$$

可求精确解析解的 Itô 随机微分方程主要有 2 类:一类是线性 Itô 随机微分方程;另一类是可用 Itô 微分公式化为线性 Itô 随机微分方程的非线性 Itô 随机微分方程,并且主要是标量 Itô 随机微分方程。文献[15]中给出了一些随机微分方程的精确解析解。而实际应用中比较复杂的随机微分方程通常采用数值解法,EM(Euler-Maruyama)数值解法是求解随机微分方程的主要方法之一,它通过对随机过程进行最简单的时间离散化近似来求解,当收敛要求较高时,可采用 Taylor 近似或 Runge-Kutta 近似,具体解法参见文献[9]。

2 多机系统随机微分方程模型的建立

对于多机系统而言,在确定性的情况下,若发电机采用经典二阶模型,负荷采用恒阻抗模型,则第 i 台发电机的转子运动方程^[16-17]为:

$$M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + D_i \frac{d \delta_i}{dt} = P_{mi} - P_{ei} \quad (3)$$

或写成:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_0 \\ \dot{\omega}_i = \frac{1}{M_i} [P_{mi} - P_{ei} - D_i(\omega_i - \omega_0)] \end{cases} \quad (4)$$

$$P_{ei} = G_{ii} E_i'^2 + E_i' \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} E_j' \sin(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (5)$$

$$P_{mi} = G_{ii} E_i'^2 + E_i' \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} E_j' \sin(\delta_{j0} - \alpha_{ij}) \quad (6)$$

$$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j \quad (7)$$

其中, M_i 为第 i 台发电机的惯性常数; δ_i 为功角; ω_i 为角速度; ω_0 为初始角速度; t 为时间; D_i 为阻尼系数; P_{ei} 为电磁功率; P_{mi} 为机械功率; E_i' 为第 i 台发电机的暂态电动势; n 为系统中发电机的总台数; δ_{j0} 为第 i 台发电机与第 j 台发电机的功角初值之差; G_{ii} 为第 i 台发电机的自电导; Y_{ij} 为第 i 台与第 j 台发电机间的互导纳; α_{ij} 为第 i 台与第 j 台发电机间阻抗角的余角。

式(4)加上随机激励(随机激励视为 Gauss 过

程) $\sigma_i W(t)$ 后,第 i 台发电机的转子运动方程变为:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_0 \\ \dot{\omega}_i = \frac{1}{M_i} [P_{mi} - P_{ei} - D_i(\omega_i - \omega_0) + \sigma_i W(t)] \end{cases} \quad (8)$$

其中, $W(t)$ 为标准 Gauss 过程; σ_i 为随机激励的强度,且存在标量 $\varepsilon > 0$, 满足 $|\sigma_i| \leq \varepsilon$ 。

对式(5)进行变形,可得:

$$\begin{aligned} P_{ei} &= G_{ii} E_i'^2 + E_i' \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} E_j' \sin(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) = \\ &G_{ii} E_i'^2 + E_i' \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} E_j' [\sin(\delta_{j0} - \alpha_{ij}) + \\ &(\delta_{ij} - \delta_{j0}) \cos(\delta_{j0} - \alpha_{ij}) + \sin(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) - \\ &\sin(\delta_{j0} - \alpha_{ij}) - (\delta_{ij} - \delta_{j0}) \cos(\delta_{j0} - \alpha_{ij})] \end{aligned} \quad (9)$$

因此可得:

$$\begin{aligned} P_{mi} - P_{ei} &= -E_i' \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} E_j' [(\delta_{ij} - \delta_{j0}) \cos(\delta_{j0} - \alpha_{ij}) + \\ &\sin(\delta_{ij} - \alpha_{ij}) - \sin(\delta_{j0} - \alpha_{ij}) - \\ &(\delta_{ij} - \delta_{j0}) \cos(\delta_{j0} - \alpha_{ij})] \end{aligned} \quad (10)$$

对各发电机的功角、角速度进行变换,即令:

$$\bar{\omega}_i = \omega_i - \omega_0, \quad \bar{\delta}_i = \delta_i - \delta_{i0} \quad (11)$$

$$\delta'_{j0} = \delta_{j0} - \alpha_{ij} \quad (12)$$

其中, δ_{i0} 为第 i 台发电机的功角初值。则式(8)变为:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\delta}}_i = \bar{\omega}_i \\ \dot{\bar{\omega}}_i = -\frac{E_i'}{M_i} \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} E_j' [(\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j) \cos \delta'_{j0} + \\ \sin(\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j + \delta'_{j0}) - \sin \delta'_{j0} - \\ (\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j) \cos \delta'_{j0}] - \frac{D_i}{M_i} \bar{\omega}_i + \frac{\sigma_i}{M_i} W(t) \end{cases} \quad (13)$$

3 多机系统随机小扰动稳定性分析

本文多机系统随机稳定性分析基于以下近似假设:发电机采用经典二阶模型;负荷采用恒阻抗模型;随机激励视为 Gauss 过程。下面以 4 机系统为例,具体证明多机系统在 Gauss 小干扰下的随机稳定性,本文选用的随机稳定性分析方法为均值稳定和均方稳定,其定义如下。

均值稳定:如果随机微分方程的解 $X(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} E(\|X(t)\|) < C$ ($E(\cdot)$ 表示均值), $C > 0$, 则系统是均值稳定的。均方稳定:如果随机微分方程的解 $X(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} E(\|X(t)X^T(t)\|) < C$, $C > 0$, 则系统是均方稳定的。

选取各发电机的功角和角速度作为状态变量,建立 4 机系统的代数-微分方程,即将式(13)写成向量形式,得:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + h(X(t)) + QdB(t) \quad (14)$$

$$A_{1-4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 \sum_{j=2}^4 H_{1j} & D'_1 & k_1 H_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2 H_{21} & 0 & -k_2 \sum_{j=1, j \neq 2}^4 H_{2j} & D'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_3 H_{31} & 0 & k_3 H_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4 H_{41} & 0 & k_4 H_{42} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{5-8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 H_{13} & 0 & k_1 H_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 H_{23} & 0 & k_2 H_{24} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_3 \sum_{j=1, j \neq 3}^4 H_{3j} & D'_3 & k_3 H_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_4 H_{43} & 0 & -k_4 \sum_{j=1}^3 H_{4j} & D'_4 \end{bmatrix}$$

$$k_i = \frac{E'_i}{M_i}, D'_i = -\frac{D_i}{M_i}, H_{ij} = Y_{ij} E'_j \cos \delta'_{j0}$$

$$X(t) = [\bar{\delta}_1 \ \bar{\omega}_1 \ \bar{\delta}_2 \ \bar{\omega}_2 \ \bar{\delta}_3 \ \bar{\omega}_3 \ \bar{\delta}_4 \ \bar{\omega}_4]^T$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sigma_1}{M_1} & 0 & \frac{\sigma_2}{M_2} & 0 & \frac{\sigma_3}{M_3} & 0 & \frac{\sigma_4}{M_4} \end{bmatrix}^T$$

$$h(X(t)) = [0 \ R_1 \ 0 \ R_2 \ 0 \ R_3 \ 0 \ R_4]^T$$

$$R_i = \frac{E'_i}{M_i} \sum_{j=1, j \neq i}^4 Y_{ij} E'_j [-\sin(\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j + \delta'_{j0}) +$$

$$\sin \delta'_{j0} + (\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j) \cos \delta'_{j0}]$$

其中, 矩阵 A 为系统在平衡点一阶线性化后所得的系统状态矩阵; A_{1-4} 为 A 的第 1—4 列; A_{5-8} 为 A 的第 5—8 列; $i=1, 2, 3, 4$ 。

对于 $h(X(t))$, 有:

$$\begin{aligned} & -\sin(\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j + \delta'_{j0}) + \sin \delta'_{j0} + (\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j) \cos \delta'_{j0} = \\ & -\sin\left(\frac{\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j + 2\delta'_{j0}}{2} + \frac{\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j}{2}\right) + \\ & \sin\left(\frac{\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j + 2\delta'_{j0}}{2} - \frac{\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j}{2}\right) + (\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j) \cos \delta'_{j0} = \\ & -2 \cos \frac{\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j + 2\delta'_{j0}}{2} \sin \frac{\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j}{2} + (\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j) \cos \delta'_{j0} \leq \\ & 2 \left| \sin \frac{\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j}{2} \right| + (\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j) \leq 2 |\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j| \end{aligned}$$

$$\text{因而可得 } R_i \leq \frac{2E'_i}{M_i} \sum_{j=1, j \neq i}^4 Y_{ij} E'_j |\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j| \quad (i=1, 2, 3,$$

4), 一般系统在受到小扰动时, 系统在平衡点附近波动, 即可近似认为 $|\bar{\delta}_i - \bar{\delta}_j|$ 相对变化量很小, 而且根据系统参数可知 $\frac{2E'_i Y_{ij} E'_j}{M_i}$ 一般都小于 1, 因而在分析时忽略 $h(X(t))$ 的影响, 这会使得理论分析与实际结

果存在一定的偏差, 具体的偏差将在算例分析中结合实际系统数据进行具体说明。忽略 $h(X(t))$ 的影响后, 即将式 (14) 近似为:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + QdB(t) \quad (15)$$

根据 Itô 随机积分可得, 式 (15) 的解为:

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} QdB(s) \quad (16)$$

首先证明上述 4 机系统的均值稳定性。由期望与方差的关系, 可知:

$$D(\|X(t)\|) = E(\|X(t)\|^2) - E^2(\|X(t)\|) \geq 0$$

因而有:

$$E^2(\|X(t)\|) \leq E(\|X(t)\|^2) = E[X^T(t)X(t)]$$

将式 (16) 代入 $E[X^T(t)X(t)]$ 中, 可得:

$$\begin{aligned} E[X^T(t)X(t)] &= E[(e^{At} X_0)^T e^{At} X_0] + \\ & E\left[\left(\int_0^t e^{A(t-s)} QdB(s)\right)^T e^{At} X_0\right] + \\ & E\left[\left(\int_0^t e^{A(t-s)} QdB(s)\right)^T \int_0^t e^{A(t-s)} QdB(s)\right] \end{aligned}$$

根据以下 Itô 随机积分的性质^[13], 即:

$$\begin{aligned} E\left[\int_{t_0}^t G(X(s), s)dB(s)\right] &= 0 \\ E\left[\left(\int_{t_0}^t G(X(s), s)dB(s)\right)^T \left(\int_{t_0}^t G(X(s), s)dB(s)\right)\right] &= \\ E\left[\left\|\int_{t_0}^t G(X(s), s)dB(s)\right\|^2\right] &= \int_{t_0}^t E[\|G(X(s), s)\|^2]ds \end{aligned}$$

可得:

$$\begin{aligned} E\left[(e^{At} X_0)^T \int_0^t e^{A(t-s)} QdB(s)\right] &= 0 \\ E\left[\left(\int_0^t e^{A(t-s)} QdB(s)\right)^T e^{At} X_0\right] &= 0 \\ E\left[\left(\int_0^t e^{A(t-s)} QdB(s)\right)^T \int_0^t e^{A(t-s)} QdB(s)\right] &= \int_0^t \|e^{A(t-s)} Q\|^2 ds \end{aligned}$$

根据向量 2 范数的定义以及常数的期望是其自身的性质, 可得:

$$E[(e^{At} X_0)^T e^{At} X_0] = (e^{At} X_0)^T e^{At} X_0 = \|e^{At} X_0\|^2$$

因此, $E[X^T(t)X(t)]$ 可简化为:

$$E[X^T(t)X(t)] = \|e^{At} X_0\|^2 + \int_0^t \|e^{A(t-s)} Q\|^2 ds$$

由矩阵的性质^[9]可以知道, $\|e^A\| \leq Ce^\lambda$ 。其中, A 为 $n \times n$ 阶矩阵; C 为大于 0 的常数; $\lambda = \max\{\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2), \dots, \text{Re}(\lambda_n)\}$, λ_i 为矩阵 A 的特征值, $\text{Re}(\lambda_i)$ 为 λ_i 的实部。

对于 $\|e^{At} X_0\|^2$, 有:

$$\begin{aligned} \|e^{At} X_0\|^2 &\leq \|e^{At}\|^2 \times \|X_0\|^2 \leq C_1^2 e^{2\lambda t} N \\ N &= \|X_0\|^2 \end{aligned}$$

其中, N 和 C_1 均为大于 0 的常数。

对于 $\int_0^t \|e^{A(t-s)} \mathbf{Q}\|^2 ds$, 有:

$$\int_0^t \|e^{A(t-s)} \mathbf{Q}\|^2 ds \leq \int_0^t \|e^{A(t-s)}\|^2 \times \|\mathbf{Q}\|^2 ds \leq \int_0^t C_1^2 e^{2\lambda(t-s)} N_2 ds = \frac{C_1^2 N_2}{2\lambda} (e^{2\lambda t} - 1)$$

其中, $N_2 = \|\mathbf{Q}\|^2$ 。

综上所述, 可得:

$$E[\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)] \leq C_1^2 e^{2\lambda t} N + \frac{C_1^2 N_2}{2\lambda} (e^{2\lambda t} - 1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} 2C_1^2 e^{2\lambda t} N + \frac{C_1^2 N_2}{2\lambda} (e^{2\lambda t} - 1)$$

电力系统若要稳定运行, 首要条件是其线性化后所得的系统状态矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值的实部均小于 0。若 $\lambda < 0$, 则可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{2\lambda t} = 0$ 。

所以, 有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} 2C_1^2 e^{2\lambda t} N + \frac{C_1^2 N_2}{2\lambda} (e^{2\lambda t} - 1) = -\frac{C_1^2 N_2}{2\lambda}$$

取 $C > -\frac{C_1^2 N_2}{2\lambda}$, 则:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E^2(\|\mathbf{X}(t)\|) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)] < C$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\|\mathbf{X}(t)\|) < \sqrt{C}$$

因此, 该系统在随机小扰动下是均值稳定的。

下面仍以上述 4 机系统为例证明其均方稳定性。

由矩阵 2 范数的定义可知, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的 2 范数就是 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵与矩阵 $\mathbf{A}$ 相乘所得矩阵的最大特征值的平方根, 即:

$$\|\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)\| = \sqrt{\rho[(\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t))^T(\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t))]} = \sqrt{\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)\rho[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)]}$$

其中, $\rho[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)]$ 为矩阵 $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)$ 最大特征值的模。

$\mathbf{X}(t)$ 为列向量, 即 $\text{rank}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)] = 1$, 所以矩阵 $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)$ 的特征值为 $n-1$ 个 0 和 $\text{tr}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)]$, 由于 $\text{tr}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)] = \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)$, 因而 $\rho[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)] = \text{tr}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)] = \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)$, 则:

$$\|\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)\| = \sqrt{\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)\rho[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)]} = \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)$$

所以, 有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\|\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)\|) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)] < C$$

由上述证明可知 C 为大于 $-\frac{C_1^2 N_2}{2\lambda}$ 的一个常数,

因此该系统在 Gauss 随机小扰动下也是均方稳定的。在实际应用中, 理论所得 C 应与实际系统稳定界限进行对比, 即系统稳定运行要求功角不能超过

90° 且频率变化不超过 ± 0.2 Hz, 若 C 小于实际稳定要求确定的实数, 则系统在 Gauss 随机小扰动下是严格均值稳定和均方稳定的。

上述的多机系统随机稳定性分析都是以 4 机系统为例, 给出了相应的证明过程, 若改成其他 n 机系统, 分析方法与其类似。不过随着发电机台数的增多、系统的扩大, 获取全系统代数-微分方程也将变得更困难, 这时则需要对系统网络进行进一步简化, 再进行稳定性分析。

4 算例分析

4.1 4 机 11 节点系统

仿真分析 4 机 11 节点系统在随机小扰动下的响应过程, 选取 4 号发电机的端电压作为参考电压, 仿真时间为 10 s, 任意选取一组随机激励强度 $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [0.01, 0.015, 0.02, 0.025]$ (强度 σ_i 为标幺值, 基值为第 i 台发电机的额定容量, 由于发电机额定容量不一样, 因此即使随机激励强度标幺值相同, 其有名值也存在差异), 各发电机功角及角速度响应曲线分别如图 1、2 所示。通过仿真图可以看出, 此时功

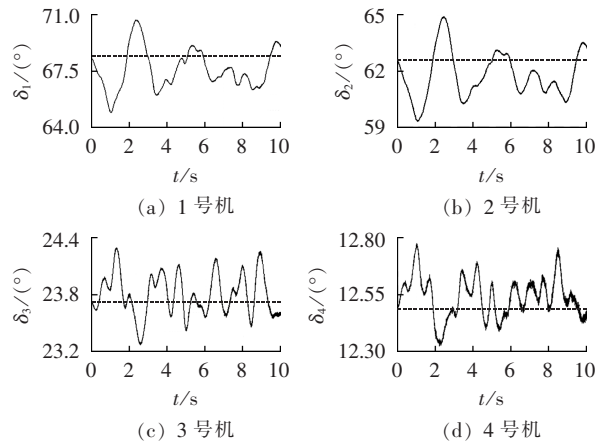


图 1 各台发电机的功角变化曲线

Fig.1 Power-angle curves of different generators

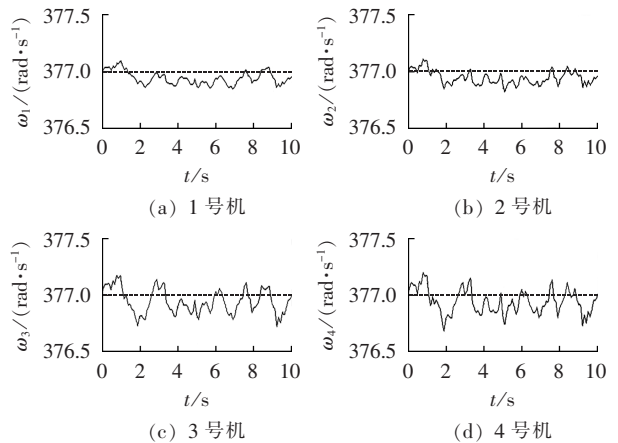


图 2 各台发电机的角速度变化曲线

Fig.2 Angular-speed curves of different generators

角围绕平衡点波动的幅度不超过 3° , 角速度围绕平衡点波动的幅度不超过 0.4 rad/s , 此时的系统在 Gauss 随机小扰动下是均值稳定和均方稳定的。

根据上述理论分析, 将 4 机 11 节点系统的参数代入求解, 系统参数为: $M_1=13 \text{ s}, M_2=13 \text{ s}, M_3=12.5 \text{ s}, M_4=12.5 \text{ s}, D_1=0.2, D_2=0.25, D_3=0.3, D_4=0.35$, 其余数据参见文献[16], 通过计算(所有计算都采用标么值)可得该系统状态矩阵 A 特征值的最大实部为 $\lambda = -0.00879$, $C_1=1.6150$, 取 $|\sigma_i| \leq 0.025$, $N_2=8.6434 \times 10^{-6}$, $C=1.2824 \times 10^{-3}$, 从仿真结果中可得 $E[\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)] < 1.3713 \times 10^{-3}$, 由理论结果与仿真结果的对比可看出两者所得界限极为接近, 虽然理论证明过程中未计及 $\mathbf{h}(\mathbf{X}(t))$ 的影响, 但由于证明过程中应用了不等式放大关系, 使得最终理论所得界限与仿真结果相差不大, 因此若理论所得界限在实际系统的稳定界限内, 则该系统在随机小扰动下是均值稳定和均方稳定的。

4.2 16 机 68 节点系统

仿真分析 16 机 68 节点系统在随机小扰动下的响应过程, 本文选取 14 号发电机的端电压作为参考电压, 仿真时间为 5 s , 观察各发电机的功角及角速度的响应轨迹, 该系统结构图及系统参数参照文献[18]。

任取一组随机激励强度 $\sigma_1=0.02, \sigma_2=\sigma_3=\dots=\sigma_{10}=0.01, \sigma_{11}=\sigma_{12}=\dots=\sigma_{15}=0.005, \sigma_{16}=0.003$, 对此系统进行仿真, 各发电机角速度曲线和功角曲线分别如图 3、图 4 所示。通过仿真图可以看出, 虽然系统受到随机小扰动, 但是由于发电机转子具有惯性, 所以各台发电机的功角和角速度曲线呈现围绕平衡点上下波动的特性, 功角围绕平衡点波动的幅度不超过 0.5° , 角速度围绕平衡点波动的幅度不超过 0.04 rad/s , 此时的系统是均值稳定和均方稳定的。改变随机激励强度, 经过多次仿真观察, 该系统在随机小扰动下都是均值稳定和均方稳定的, 验证了第 3 节的理论证明。

以 1 号发电机的功角及角速度曲线为例说明不同随机激励强度对电力系统的影响。设第 1 组随机激励强度 $[\sigma_i]_1$ 为 $\sigma_1=0.02, \sigma_2=\sigma_3=\dots=\sigma_{10}=0.01, \sigma_{11}=\sigma_{12}=\dots=\sigma_{15}=0.005, \sigma_{16}=0.003$; 第 2 组随机激励强度 $[\sigma_i]_2$ 为 $\sigma_1=0.03$, 其余与第 1 组相同。1 号发电机在 2 组随机激励强度下的响应曲线分别如图 3(a)、4(a)和图 5 所示。由仿真结果可知, 当仅增加某一随机激励的强度而其他随机激励强度保持不变时, 发电机功角曲线和角速度曲线的波动幅度随之增大, 但整个系统仍保持均值稳定和均方稳定。

减少随机激励的数目, 即设第 3 组随机激励强度 $[\sigma_i]_3$ 为 $\sigma_1=0.02$, 其余随机激励强度均为 0, 仿真曲线如图 6 所示。由仿真结果可知, 虽然外部随机扰动的数量减少了, 但功角围绕平衡点波动的幅度

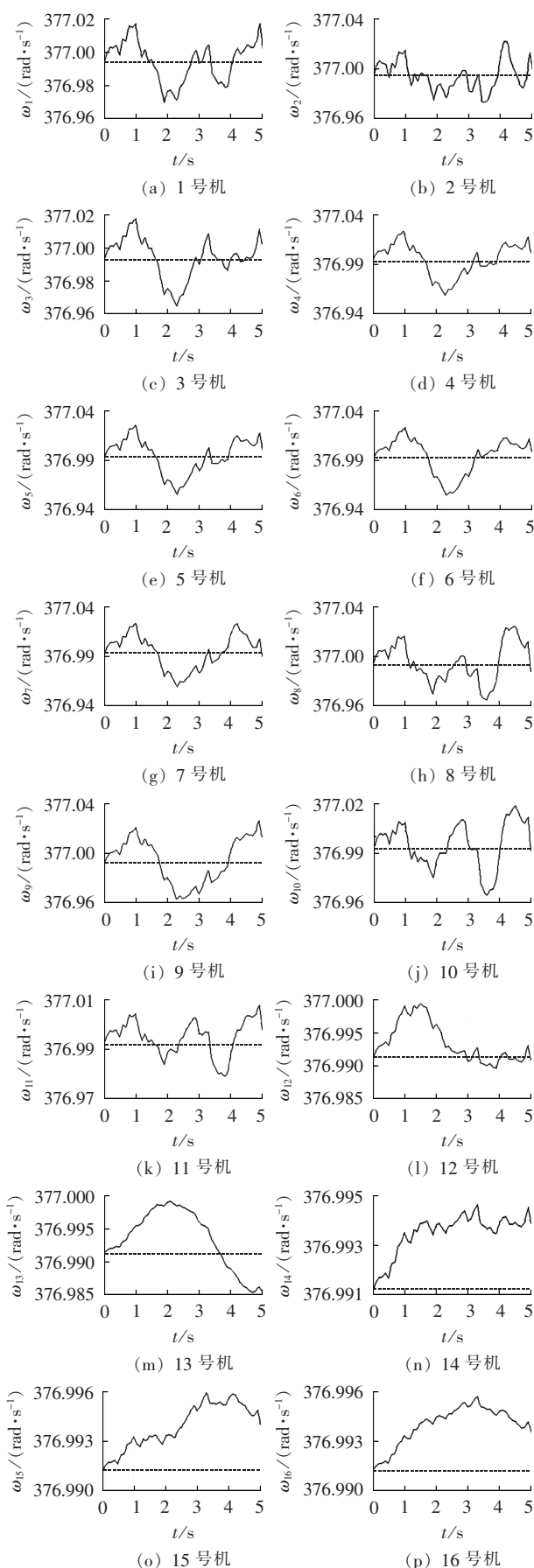


图 3 各台发电机的角速度变化曲线

Fig.3 Angular-speed curves of different generators

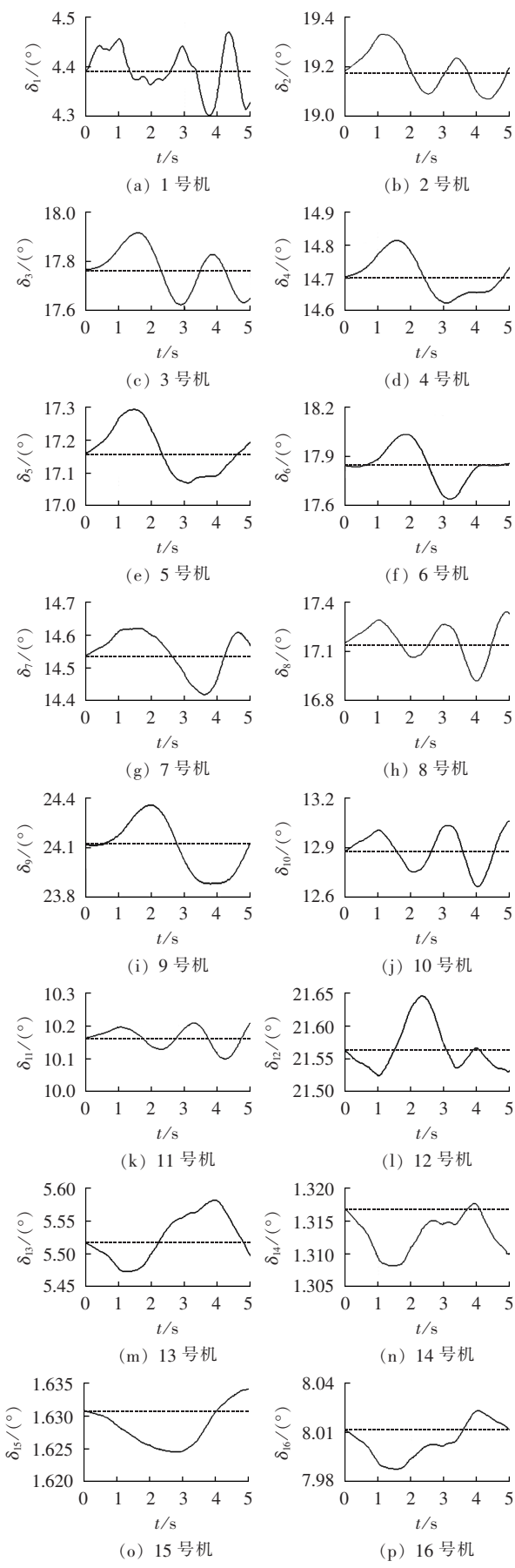


图 4 各台发电机的功角变化曲线
Fig.4 Power-angle curves of different generators

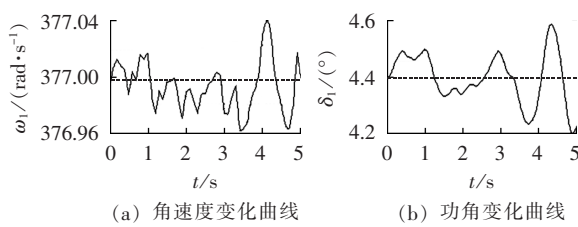


图 5 1 号发电机在第 2 组随机激励强度下的
角速度、功角变化曲线
Fig.5 Angular-speed and power-angle curves of
Generator 1 for second random excitation

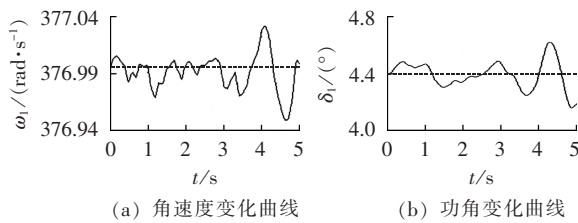


图 6 1 号发电机在第 3 组随机激励强度下的
角速度、功角变化曲线
Fig.6 Angular-speed and power-angle curves of
Generator 1 for third random excitation

却稍有增大,这是由于扰动的随机性,这种随机性导致小扰动间会存在抵消作用,因此随着扰动数量的增加,其对系统总的影响却不一定会增强。

5 结论

本文采用加入随机干扰项后的非线性微分方程作为系统模型,在 Gauss 小扰动下进行了近似假设,利用 Itô 随机微分方程的相关理论分析证明了在随机激励强度满足一定的条件下($\|\sigma\| \leq \varepsilon$),若多机系统状态矩阵的特征值实部均小于 0,则多机系统是均值稳定和均方稳定的,即各发电机功角和角速度围绕原平衡点上下波动,波动幅度有限,不会出现发散现象,即不会产生新的稳定问题。利用 Simulink 分别对 4 机 11 节点系统和 16 机 68 节点系统进行了仿真分析,仿真结果与理论证明相一致。

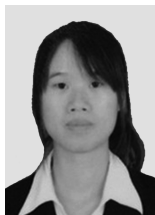
本文作为起步性研究,在理论证明中进行了合理近似和不等式放大关系,这些造成了理论与仿真结果之间存在一定的差异,但不影响系统随机小干扰稳定判断。进一步研究的重点是如何采用其他稳定分析方法对系统在随机激励下进行更准确的稳定界限推导以及如何分析系统在随机大扰动下的稳定情况。

参考文献:

[1] 朱永胜,王杰,瞿博阳,等. 含电动汽车的电力系统动态环境经济调度[J]. 电力自动化设备,2016,36(10):16-23.
ZHU Yongsheng,WANG Jie,QU Boyang,et al. Dynamic environment and economic dispatch of power system with EVs[J]. Electric Power Automation Equipment,2016,36(10):16-23.
[2] 马静,高翔,李益楠,等. 考虑风速随机特征的多工况电力系统稳定性分析[J]. 电力自动化设备,2016,36(8):1-7.

- MA Jing,GAO Xiang,LI Yanan,et al. Stability analysis considering time-varying wind speed for power system with multiple operating conditions[J]. Electric Power Automation Equipment,2016,36(8):1-7.
- [3] 肖定焱,王承民,曾平良,等. 考虑可再生能源电源功率不确定性的电源灵活性评价[J]. 电力自动化设备,2015,35(7):120-125.
- XIAO Dingyao,WANG Chengmin,ZENG Pingliang,et al. Power source flexibility evaluation considering renewable energy generation uncertainty[J]. Electric Power Automation Equipment,2015,35(7):120-125.
- [4] 薛禹胜,雷兴,薛峰,等. 关于风电不确定性对电力系统影响的评述[J]. 中国电机工程学报,2014,34(29):5029-5040.
- XUE Yusheng,LEI Xing,XUE Feng,et al. A review on impacts of wind power uncertainties on power systems[J]. Proceedings of the CSEE,2014,34(29):5029-5040.
- [5] 朱星阳,刘文霞,张建华. 考虑大规模风电并网的电力系统随机潮流[J]. 中国电机工程学报,2013,33(7):77-85.
- ZHU Xingyang,LIU Wenxia,ZHANG Jianhua. Probabilistic load flow method considering large-scale wind power integration[J]. Proceedings of the CSEE,2013,33(7):77-85.
- [6] 彭云建,邓飞其. 电力系统随机稳定性分析与控制问题综述[J]. 电工电能新技术,2007,26(3):52-58.
- PENG Yunjian,DENG Feiqi. A survey on power system stochastic stability analysis and control[J]. Advanced Technology of Electrical Engineering and Energy,2007,26(3):52-58.
- [7] DE MARCO C L,BERGEN A R. A security measure for random load disturbances in nonlinear power system models[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems,1987,34(12):1546-1557.
- [8] 张建勇,鞠平,余一平,等. 电力系统在高斯随机小激励下的响应及稳定性[J]. 中国科学:技术科学,2012,42(7):851-857.
- ZHANG Jianyong,JU Ping,YU Yiping,et al. Response and stability of power system in Gauss small random excitation[J]. Scientia Sinica Technologica,2012,42(7):851-857.
- [9] 许纹碧,王杰. 非线性电力系统随机小干扰稳定性分析[J]. 电网技术,2014,38(10):2735-2740.
- XU Wenbi,WANG Jie. Stochastic small disturbance stability analysis of nonlinear power system[J]. Power System Technology,2014,38(10):2735-2740.
- [10] 鞠平,李洪宇,薛禹胜,等. 考虑随机激励的电力系统机电暂态过程模型[J]. 河海大学学报(自然科学版),2013,41(6):536-541.
- JU Ping,LI Hongyu,XUE Yusheng,et al. Stochastic models for study of electromechanical transient process in power systems [J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences),2013,41(6):536-541.
- [11] 刘咏飞,鞠平,薛禹胜,等. 随机激励下电力系统特性的计算分析[J]. 电力系统自动化,2014,38(9):137-142.
- LIU Yongfei,JU Ping,XUE Yusheng,et al. Calculation analysis on power system characteristics under random excitation[J]. Automation of Electric Power Systems,2014,38(9):137-142.
- [12] 王启明. 伊藤随机微分方程及其在电力系统中应用研究[D]. 南京:河海大学,2006.
- WANG Qiming. Research on Itô stochastic differential equation and its application in electric power system[D]. Nanjing:Hohai University,2006.
- [13] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制[M]. 北京:科学出版社,2003:77-118.
- [14] 龚光鲁. 随机微分方程及其应用概要[M]. 北京:清华大学出版社,2008:100-124.
- [15] KLODEN P E,PLATEN E. Numerical solutions of stochastic differential equations[M]. Berlin,Germany:Spring-Verlag,1992:199-231.
- [16] 李洪宇,鞠平,余一平,等. 随机激励下电力系统有界波动域及域内概率解析分析方法[J]. 中国电机工程学报,2015,35(14):3561-3568.
- LI Hongyu,JU Ping,YU Yiping,et al. Bounded fluctuations region and analytic method of intra-region probability in power system under stochastic excitations[J]. Proceedings of the CSEE,2015,35(14):3561-3568.
- [17] PRABHA K. Power system stability and control[M]. 北京:中国电力出版社,2001:848-872.
- [18] BIKASH P,BALARKO C. Robust control in power systems[M]. New York,USA:Springer Science,Business Media,2005:171-177.

作者简介:



王 芮

王 芮(1991—),女,江苏南通人,硕士研究生,研究方向为电力系统稳定分析与控制(E-mail:wangrui19911120@126.com);

王 杰(1960—),男,江苏南京人,教授,博士研究生导师,研究方向为复杂电力系统非线性控制、自适应控制、鲁棒控制、电力系统非线性控制与稳定分析;

弥 潇(1991—),女,陕西西安人,博士研究生,研究方向为电力系统稳定分析与控制。

Multi-generator system stability analysis considering influence of stochastic small disturbance

WANG Rui,WANG Jie,MI Xiao

(School of Electronic Information and Electrical Engineering,Shanghai Jiao Tong University,Shanghai 200240,China)

Abstract: Since the stochastic factors of power system increase unceasingly along with the large-scale integration of renewable energy power generation,such as wind energy and solar energy,the traditional deterministic linear stability analysis methods should be improved. For analyzing the stochastic stability of multi-generator system under stochastic disturbances,a nonlinear power system model with stochastic disturbance term is adopted and the mean stability and mean-square stability of power-angle and angular-speed of multi-generator system under Gauss stochastic small disturbances are analyzed based on the relevant theories of Itô stochastic differential equations. Simulative calculations in MATLAB/Simulink are carried out for a 4-machine 11-bus system and a 16-machine 68-bus system,which verifies the validity of the theoretical demonstration by analyzing the response curves of system under stochastic disturbances.

Key words: multi-generator system; stochastic disturbance; Itô differential equations; stability