基于曲率半径及两分搜索法的改进延拓法

吕智林,杨再学,王先齐
(广西大学 电气工程学院,广西 南宁 530004)

摘要:传统延拓法追踪电力系统平衡解流形存在局部失真严重和搜索分岔点计算量大、精度低的问题。针对这些问题,提出一种基于曲率半径及两分搜索法的改进延拓法。基于曲率半径的改进不仅在弯曲程度高的区域使平衡解流形的失真程度较小,而且在平坦区域具有较高的追踪速度;基于两分搜索法的改进简化了分岔点的搜索步骤、减小了计算量、提高了精度。以典型三节点电力系统为例进行数值仿真实验,先应用自动改变同伦的算法从任意点获取平衡解流形起始点,再从不同的起始点追踪到多条纯数学理论下的平衡解流形,接着使用两分搜索法搜索平衡解流形上的分岔点,最后将所得结果与 Matcont 软件包、传统延拓法求解结果的对比分析,验证了所提方法的正确性和有效性。

关键词:延拓法;平衡解流形;分岔点;曲率半径;两分搜索法;电力系统

中图分类号:TM 761 **文献标识码:**A DOI:10.16081/j.issn.1006-6047.2018.03.017

0 引言

近些年来,世界范围内发生的几次大停电事故[1-4]让社会经济遭受了巨大的损失,也给人们的生活带来了极大的不便。这让电力系统的稳定性问题再次成为关注的焦点。电压稳定性是电力系统稳定性研究的主要内容之一。电压稳定性包括静态稳定性和动态稳定性。分岔理论是一种研究电压稳定性的数学方法。分岔点是电压稳定的临界点。鞍结分岔点 SB(Saddle-node Bifurcation point)是电力系统电压静态稳定性的临界点,常常会引起电力系统的电压突然崩溃、系统失稳、低频振荡等复杂现象。霍普夫分岔点 HB(Hopf Bifurcation point)是电力系统电压动态稳定的临界点,常常会引起电压崩溃前的电压振荡等现象。在电力系统的平衡解流形上搜索出鞍结分岔点和霍普夫分岔点对于分析电力系统的电压稳定性具有非常重要的意义。

延拓法(亦称同伦法、嵌入法)是一种在追踪电力系统的平衡解流形时比较受欢迎的方法[5]。但在追踪电力系统平衡解流形过程中起始点的获取,普遍的做法仍然是通过解常规潮流方程[5-6]。利用延拓法来解决起始点获取问题的文献非常少。使用牛顿法等传统迭代法是否取得成功,强烈依赖于初值的选取是否合适。相对于牛顿法等传统迭代法而言,延拓法的优越性恰恰就在于其初值的任意性以及大范围收敛性。本文就如何使用自动改变同伦的算法来解决起始点的获取问题进行阐述,并且从不同的起始点出发,追踪到多条平衡解流形。

在追踪平衡解流形时,步长的选取方法多种多样。其中,文献[7]提出了投影增量法和弦线角增量法。文献[6]提出了根据单位切向量的大小来改变步长的方法,在平衡解流形平坦处选用较大的步长,反之选用较小的步长。文献[8]提出了根据计算时迭代次数的大小来改变步长的方法。文献[9]提出了一种改进的自动变步长法。文献[10]提出了一种根据计算是否收敛来改变步长的方法。总而言之,上述这些方法都是通过预先设定一个条件,当满足该条件时,就对步长进行加倍或者减半处理;否则,步长保持不变。下文将这种修改步长的方法称为加倍或减半步长法。该方法常会使平衡解流形在弯曲程度高的区域失真较严重。针对该问题,本文提出一种根据曲率半径来修改步长的方法。该方法能使平衡解流形在弯曲程度越高的区域越光滑。电力系统故障通常都是发生在平衡解流形弯曲程度较高的区域,这也是该方法的一个重要意义之所在。

通过数值计算方法得到的平衡解流形,实际上就是把一系列离散的平衡点依次连接而成的曲线。由于数值方法得到的是一系列的离散点,无论是与之对应的切向量还是与之对应的雅可比矩阵的特征值都是离散的。分岔点的条件是苛刻的,通过数值方法得到的这一系列平衡点并不一定恰好就有所求的分岔点。因此,就必须在平衡解流形上搜索分岔点,常用方法是抛物插值法[5-6,9,11-12],该方法得到的分岔点的精度与所插的点数有关。如果精度要求较高,那么使用该方法的计算量是相当大的,而且所插的点也不是严格意义上的平衡点。针对上述问题,本文提出一种计算量相对较小而精度又较高的两分搜索法来求取平衡解流形上的分岔点。

下文将使用自动改变同伦的算法来获取起始点、根据曲率半径来修改步长并结合两分搜索法求取分岔点的方法称为改进延拓法。将通过解常规潮流方程获取起始点、使用加倍或减半步长法并结合

收稿日期:2017-04-07;**修回日期:**2017-12-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61364027)
Project supported by the National Natural Science Foundation of China(61364027)

抛物插值法来搜索分岔点的方法称为传统延拓法。

1　平衡解流形

一个形如式(1)的微分-代数方程组的平衡解流形,就是满足方程组式(2)的解 $\boldsymbol{x}$ 的集合。

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\lambda)\\0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\lambda)\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\lambda)\\0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\lambda)\end{cases}\tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{x}$ 为系统状态变量; $\dot{\boldsymbol{x}}$ 为状态变量对时间的导数; λ 为控制参数; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\lambda)$ 为系统状态变量关于时间变化的向量场; $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\lambda)$ 为系统代数约束方程组。

不妨将式(2)表示为:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=0\tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{x}$ 为包含了状态变量和控制参数的广义系统变量。

若方程组式(3)中方程的个数比 $\boldsymbol{x}$ 的维数少 1,则其平衡解流形通常是一条曲线。文献[5-6,8-9,11-21]中提到含一个控制参数的电力系统,若将控制参数并入 $\boldsymbol{x}$ 中当作 $\boldsymbol{x}$ 的一个分量,此时方程的个数比 $\boldsymbol{x}$ 的维数少 1,其平衡解流形是一条曲线。若方程组式(3)中方程的个数等于 $\boldsymbol{x}$ 的维数,平衡解流形通常是一个点,电力系统常规潮流方程的平衡解流形就属于这一类。

含一个控制参数的电力系统的动态数学模型通常可以表示成式(1)的形式,其平衡解流形通常是一条曲线。要描绘出这条曲线,最常用的方法是基于预测-校正的延拓法(也称连续潮流法、间接法)。要获得这条曲线的起始点,常用的方法是求解该系统的常规潮流方程。本文将采用自动改变同伦的算法,从任意点获得平衡解流形的起始点。

2　自动改变同伦的算法

假定 $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{D}\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x}^*$ 是方程组式(3)的解。

同伦法的基本思想是将求方程组式(3)在给定初始点 $\boldsymbol{x}_0$ 条件下的解 $\boldsymbol{x}^*$ 的问题转化为引入参数 w,构造一簇映象 $\boldsymbol{H}$ 代替单个映象 $\boldsymbol{F}$,其中 $\boldsymbol{H}$ 满足:

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{x})\\\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\end{cases}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{x})=0$ 的解为 $\boldsymbol{x}_0$。 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},1)=0$ 的解就是方程组式(3)的解。也就是将求方程组式(3)在给定初始点 $\boldsymbol{x}_0$ 条件下解 $\boldsymbol{x}^*$ 的问题转化为求解同伦方程式(5)的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(w)$ 的问题。此处 $\boldsymbol{x}:[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 连续依赖于参数 w。当 $w=0$ 时, $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$;当 $w=1$ 时, $\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{x}^*$。

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},w)=0\quad w\in[0,1],\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\tag{5}$$

从任意点 $\boldsymbol{x}_0$ 出发,通过同伦法寻找平衡解流形上足够好的起始点 $\boldsymbol{x}^*$,本文采用文献[22]所述的带参数 w 的同伦方程:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},w,\alpha(w))=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-(1-w)\times\\ [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)-\alpha(w)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]=0\end{aligned}\tag{6}$$

其中, $w\in[0,1]$,函数 $\alpha(w)=a(1+w+w^2)$, a 为控制非奇参数。开始时 $a=0$,若计算过程中遇到矩阵 $[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})+a(1-w^3)\boldsymbol{E}]^{-1}$ 奇异, a 自动增加 Δa,就能穿过奇异点。

方程式(6)两边对参数 w 求导之后,可以整理得到如式(7)所示的含初值条件的微分方程组:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'(w)=[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})+a(1-w^3)\boldsymbol{E}]^{-1}\times\\ \qquad [3aw^2(\boldsymbol{x}(w)-\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)]\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{7}$$

其中, $\boldsymbol{E}$ 为阶数与 $\boldsymbol{x}$ 维数相同的单位矩阵。为了得到足够好的起始点,本文结合了精度较高的四阶龙格-库塔公式。本方法可以从任意点较易获得足够好的起始点。虽然不是从每一个任意点都能得到起始点,但通常只需尝试几次就能成功。本方法的有效性完全依赖于同伦法的大范围收敛性、能够穿过奇点的能力以及初值任意性等特点[23]。

在这里需要说明的是:对含一个控制参数的电力系统而言,其方程组式(3)中方程的个数比 $\boldsymbol{x}$(包含了状态变量和控制参数)的维数少 1,需要在方程组式(3)中添加一个系数全为 0 的齐次方程,才能顺利使用同伦法进行计算;否则方程组式(3)的雅可比矩阵不是方阵,无法对其进行求逆运算。

3　基于预测-校正的延拓法

3.1　基于预测-校正的延拓法

基于预测-校正的延拓法的思想可描述如下:要描绘方程组式(3)所表示的曲线 Γ,如图 1 所示,首先要获得一个起始点 A,从这个起始点出发,沿着预测方向 $\boldsymbol{T}$(通常取曲线 Γ 的切线方向)前进一定的距离(步长 h),得到一个预测点 B;然后使用一个收敛速度较快的迭代法对该预测点加以校正,得到一个平衡点(即校正点) C;再将这个平衡点当作新的起始点,重复上述过程就会得到一系列的平衡点;最后将起始点和所有的平衡点依次连接起来,就得到这条曲线 Γ。从一个起始点出发,只能得到一条曲

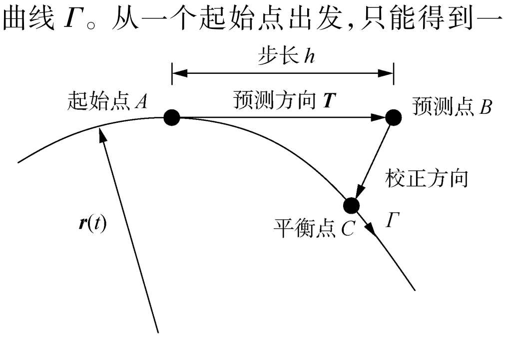


图 1　基于预测-校正的延拓法示意图

Fig.1　Schematic diagram of continuation method based on predictor-corrector

线。这条曲线 Γ 称为方程组式(1)的平衡解流形。若方程组式(3)有多条曲线,那么有几条曲线,就至少需从几个起始点出发才能完全追踪到全部曲线。

对于一条如图1所示的正则光滑曲线 Γ,设其方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。关于预测方向 $\boldsymbol{T}$,本文取为其单位切向量 $\boldsymbol{T}(t)=\boldsymbol{r}'(t)$ 的方向。对于预测点的校正,本文使用与文献[11,23]相同的牛顿迭代法。当然,也可以如同文献[10],使用 MATLAB 工具箱中的 fsolve 函数来完成预测点的校正。至于具体的操作,可以查看相关的文献,此处不再赘述。

3.2 使用曲率半径自动改变步长

对于一条如图2中所示的正则光滑曲线 Γ,在曲线 Γ 截取一小段弧,当弧长 s 足够小时,可将这段弧看作一段圆弧。换言之,可用一个曲率圆的圆弧来拟合这一小段弧,曲率圆的半径称为曲率半径。

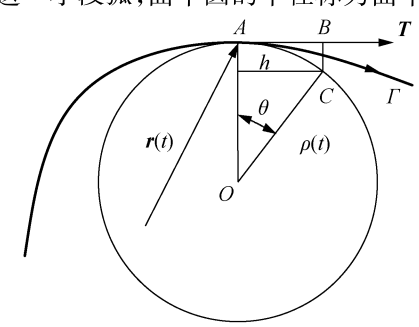


图2 曲率半径与步长的关系示意图

Fig.2 Relation between curvature radius and step length

由微分几何的知识可知,弧的弯曲程度越高,其曲率半径就越小;弧的弯曲程度越低(也称弯曲程度低为平坦),其曲率半径就越大。可见,用曲率半径的大小来表示弧弯曲程度的高低是合理的。下面具体阐述一下如何根据曲率半径来自动改变步长。

假设图2中 A 点处曲率圆为圆 O,曲率半径为 $\rho(t)$,若沿预测方向 $\boldsymbol{T}$ 前进一个步长 h 到达 B 点,误差 ε 为 BC,对应的圆心角为 θ。由几何关系易得出:

$$\varepsilon=\rho(t)(1-\cos\theta) \tag{8}$$

$$h=\rho(t)\sin\theta \tag{9}$$

由式(8)、(9)可知,h、ε 都与 $\rho(t)$ 成正比例关系。在 θ 一定的情况下,$\rho(t)$ 越小,h 越小,对应的 ε 也越小。换言之,在弯曲程度越高的区域,预测点偏离平衡点的距离反而越小,曲线越光滑。为了便于程序处理,可把 θ 取为一个定值(例如 $\theta=5°$),并取一个误差限 ε_1 和一个最大步长 $h_{\max}$。若按式(8)计算的误差 $\varepsilon \geqslant \varepsilon_1$,步长取为 $h=h_{\max}$;反之,步长按式(9)来取。

由微分几何的相关知识可知,曲率半径 $\rho(t)$ 的计算公式为[25]:

$$\rho(t)=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|} \tag{10}$$

若该曲线方程的参数取弧长 s,即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$,曲率半径的计算公式为:

$$\rho(s)=\frac{|\boldsymbol{r}'(s)|^3}{|\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)|} \tag{11}$$

由微分几何的知识可知,曲线的弧长、曲率、挠率都是运动不变量,则:

$$\rho(t)=\rho(s) \tag{12}$$

对于如文献[24]所述的含一个控制参数 λ 的电力系统平衡解流形,其普遍形式如下:

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x},\lambda)=0 \\ f_2(\boldsymbol{x},\lambda)=0 \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x},\lambda)=0 \end{cases} \tag{13}$$

式(13)不妨记为:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\lambda)=0 \tag{14}$$

其中,$\boldsymbol{F}=[f_1,f_2,\cdots,f_n]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态量,$\boldsymbol{x}$ 和 λ 都是关于弧长参数 s 的函数。等式两边对 s 求导,得:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\lambda)}{\mathrm{d}s}=0 \tag{15}$$

在数学上,不妨将 λ 看作是 x_{n+1},这样就可在 $n+1$ 维空间中进行讨论。

由微分几何的知识可知,单位切向量[25]为:

$$\boldsymbol{T}(s)=\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s},\cdots,\frac{\mathrm{d}x_{n+1}}{\mathrm{d}s}\right)^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

约定运算符 ∇ 为:

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

则式(15)可化为:

$$\nabla f_i\cdot\boldsymbol{T}(s)=0 \quad i=1,2,\cdots,n \tag{18}$$

其中,运算符"·"为向量的点乘运算符。可见,$\boldsymbol{T}(s)$ 与 $\nabla f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都垂直。

在 $n+1$ 维空间中定义一种类似于三维空间的叉乘(×)运算,约定:

$$\nabla f_1\times\nabla f_2\times\cdots\times\nabla f_n=(a_1,a_2,\cdots,a_{n+1})^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

其中,$a_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 由式(20)决定。

$$\det([\boldsymbol{m},\nabla f_1,\nabla f_2,\cdots,\nabla f_n])=\sum_{i=1}^{n+1}a_i e_i \tag{20}$$

其中,$\boldsymbol{m}=(e_1,e_2,\cdots,e_{n+1})^{\mathrm{T}}$ 为 $n+1$ 维空间中的单位向量;det 为求行列式运算。则:

$$\boldsymbol{T}(s)=\frac{\nabla f_1\times\nabla f_2\times\cdots\times\nabla f_n}{|\nabla f_1\times\nabla f_2\times\cdots\times\nabla f_n|} \tag{21}$$

令 $\boldsymbol{\tau}=\nabla f_1\times\nabla f_2\times\cdots\times\nabla f_n$,式(21)可化为:

$$|\boldsymbol{\tau}|\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{\tau} \tag{22}$$

等号两边对 s 求导,在伏雷内[25]标架下,得:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\boldsymbol{\tau}|\right)\boldsymbol{T}(s)+|\boldsymbol{\tau}|k(s)\boldsymbol{N}(s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{\tau} \tag{23}$$

其中,$k(s)$ 为曲率;$\boldsymbol{N}(s)$ 为单位主法向量。

约定运算符 ∇^2 为:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(n+1)\times(n+1)} \quad i,j = 1,2,\cdots,n+1 \tag{24}$$

则式(23)可化为:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\tau}|k(s)\boldsymbol{N}(s) = &-(\boldsymbol{T}(s)\cdot\nabla|\boldsymbol{\tau}|)\boldsymbol{T}(s) + \\ &(\nabla^2 f_1\boldsymbol{T}(s))\times\nabla f_2\times\cdots\times\nabla f_n+\cdots+ \\ &\nabla f_1\times\nabla f_2\times\cdots\times(\nabla^2 f_n\boldsymbol{T}(s))\end{aligned} \tag{25}$$

令:

$$\begin{aligned}\beta = &(\nabla^2 f_1\boldsymbol{T}(s))\times\nabla f_2\times\cdots\times\nabla f_n+\cdots+ \\ &\nabla f_1\times\nabla f_2\times\cdots\times(\nabla^2 f_n\boldsymbol{T}(s))\end{aligned} \tag{26}$$

式(25)等号两边同时乘以 $|\boldsymbol{\tau}|^2$,并取向量的模,可得:

$$k(s) = \frac{|-(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla|\boldsymbol{\tau}|)\boldsymbol{\tau} + |\boldsymbol{\tau}|\beta|}{|\boldsymbol{\tau}|^3} \tag{27}$$

又因为 $\rho(s)k(s) = 1$,所以:

$$\rho(s) = \frac{|\boldsymbol{\tau}|^3}{|-(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla|\boldsymbol{\tau}|)\boldsymbol{\tau} + |\boldsymbol{\tau}|\beta|} \tag{28}$$

至此,便得到了平衡解流形($n+1$ 维空间曲线)的曲率半径计算公式。

4　分岔点的搜索

4.1　分岔点的分类

通常情况下考虑的电力系统分岔点有鞍结分岔点和霍普夫分岔点。当平衡点对应的雅可比矩阵($\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 对状态变量求偏导数得到的方阵,后同)有零特征值时,该平衡点为鞍结分岔点;当平衡点对应的雅可比矩阵有一对纯虚数的特征值时,该平衡点为霍普夫分岔点。也可以根据平衡解流形的雅可比矩阵的根轨迹来判断分岔点的位置:当根轨迹通过复平面的原点时,对应的平衡点为鞍结分岔点;当根轨迹从非原点处穿过复平面的虚轴时,对应的平衡点为霍普夫分岔点。

4.2　两分搜索法求取分岔点

当使用数值计算方法得到的平衡点中并非恰好含有分岔点时,就需要对分岔点进行搜索。本文采用两分搜索法来求取平衡解流形上的分岔点。两分搜索法的思想可表述如下:先判断平衡点是否为分岔点,若不是,通过 2 个相邻平衡点的雅可比矩阵特征值的实部大于 0 的个数是否相等来判断它们之间是否存在分岔点,若存在,取这 2 个相邻的平衡点为搜索区间的端点。对搜索区间的中点进行校正后得到一个新的平衡点,用相同的方法在新平衡点和两端点之间找出新的搜索区间。如此重复,直至找到特征值实部为 0 的平衡点为止。接着通过判断实部为 0 的特征值的虚部是否为 0 来确定该平衡点为鞍结分岔点还是霍普夫分岔点:若对应的虚部为 0,则该平衡点为鞍结分岔点;反之,则为霍普夫分岔点。

使用两分搜索法只能在一个搜索区间内找到一个分岔点。若搜索区间内存在多个分岔点,分岔点就会丢失。经过大量的数值实验得出结论:在使用传统延拓法追踪平衡解流形时,若最大步长选择不恰当,常会出现相邻平衡点之间存在多个分岔点的现象。使用改进延拓法,若图 2 中的 θ 取值较小,通常不会出现相邻平衡点间存在多个分岔点的情况。

5　算例

下面使用文献[24]所述的经典三节点电力系统为例来验证本文所提方法的正确性和有效性。其系统图如图 3 所示。

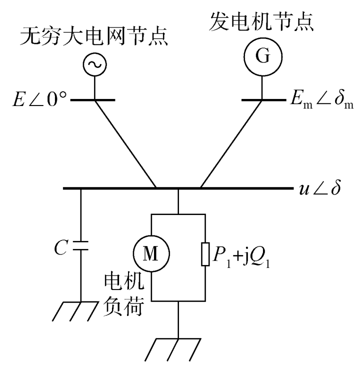


图 3　典型三节点电力系统结构图

Fig.3　Typical three-bus power system

该系统的具体参数及其物理意义可以查阅文献[24],此处不再赘述。其微分方程组为:

$$\begin{cases}\dot{\delta}_m = \omega \\ \dot{\omega} = 16.666\ 67\sin(\delta-\delta_m+0.087\ 27)u - \\ \quad 0.166\ 67\omega + 1.880\ 74 \\ \dot{\delta} = 496.871\ 81u^2 - 166.666\ 67\cos(\delta-\delta_m - \\ \quad 0.087\ 27)u - 666.666\ 67\cos(\delta - 0.209\ 44) - \\ \quad 93.333\ 33u + 33.333\ 33Q_1 + 43.333\ 33 \\ \dot{u} = -78.763\ 84u^2 + 26.217\ 22\cos(\delta-\delta_m - \\ \quad 0.012\ 41)u + 104.868\ 87\cos(\delta-0.134\ 58)u + \\ \quad 14.522\ 88u - 5.228\ 76Q_1 - 7.032\ 68\end{cases} \tag{29}$$

令 $\boldsymbol{x} = [\delta_m,\omega,\delta,u,Q_1]^T$,其中,$\delta_m$、$\omega$、$\delta$、$u$ 为状态变量,Q_1 为控制参数。本文所用的各变量都是使用标幺值,下文不再赘述。该系统的平衡解流形 $\boldsymbol{x}$ 满足:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = [f_1,f_2,f_3,f_4]^T = 0 \tag{30}$$

$$f_1 = \dot{\delta}_m,\ f_2 = \dot{\omega},\ f_3 = \dot{\delta},\ f_4 = \dot{u}$$

5.1　使用改进延拓法从任意点获取起始点

在表 1 中给出几组使用改进延拓法从任意点追踪到的起始点。

从表 1 第三列数据可看出,任意点都距离平衡点相当远。从第四列数据可以看出,得到的起始点距离平衡点都非常近。而当任意点为(0,0,0,0,0)时,使用非线性系统动态分岔与混沌分析的商

表1 改进延拓法从任意点追踪到的起始点

Table 1 Starting points tracked by improved continuation method from arbitrary points

任意点 $\boldsymbol{x}_0(\delta_m,\omega,\delta,u,Q_1)$	起始点 $\boldsymbol{x}^*(\delta_m,\omega,\delta,u,Q_1)$	$\Vert \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\Vert_2$	$\Vert \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)\Vert_2$
(0,0,0,0,0)	(1.251 6,0,-2.922 4,-0.139 2,1.108 8)	43.940 6	$9.515\ 7\times10^{-13}$
(1,1,1,1,1)	(1.648 0,0,0.170 7,0.114 7,1.121 1)	$1.558\ 0\times10^{2}$	$1.238\ 4\times10^{-7}$
(-1,-1,-1,-1,-1)	(11.503 4,0,6.517 2,-0.114 8,-4.317 0)	$1.015\ 5\times10^{3}$	$1.450\ 4\times10^{-7}$
(2,2,2,2,2)	(1.308 9,0,3.358 5,-0.133 7,0.988 2)	$1.895\ 3\times10^{3}$	$1.302\ 2\times10^{-11}$
(-2,-2,-2,-2,-2)	(-3.097 5,0,-3.053 8,-0.864 1,-2.011 1)	$1.711\ 3\times10^{3}$	$4.759\ 1\times10^{-7}$
(1,2,3,4,5)	(0.622 3,0,3.362 8,-0.365 6,4.609 3)	$1.064\ 8\times10^{4}$	$2.073\ 9\times10^{-13}$
(-1,-2,-3,-4,-5)	(0.252 5,0,-3.045 9,-1.624 1,-5.012 7)	$5.277\ 1\times10^{3}$	$6.102\ 7\times10^{-8}$
(5,4,3,2,1)	(10.808 3,0,3.375 8,0.129 2,-3.558 5)	$3.335\ 4\times10^{3}$	$2.935\ 2\times10^{-11}$
(-5,-4,-3,-2,-1)	(-6.005 5,0,-3.028 7,-1.458 8,-1.001 6)	$7.514\ 0\times10^{2}$	$1.072\ 4\times10^{-13}$
(1,3,5,7,9)	(-23.263 9,0,-12.405 8,0.113 0,0.957 2)	$2.480\ 5\times10^{4}$	$3.055\ 9\times10^{-9}$
(-9,-7,-5,-3,-1)	(-7.826 2,0,-6.069 1,-0.117 2,-4.119 0)	$5.421\ 2\times10^{3}$	$2.086\ 7\times10^{-13}$
(2,4,6,8,10)	(6.752 1,0,6.458 3,0.550 2,9.279 3)	$2.802\ 8\times10^{4}$	$5.344\ 0\times10^{-9}$
(10,20,30,40,50)	(7.792 5,0,0.177 0,0.119 1,1.292 7)	$8.010\ 3\times10^{5}$	$2.233\ 5\times10^{-13}$

用软件包 Matcont 无法追踪到该系统的平衡解流形。

5.2 从任意点 $A(0,0,0,0,0)$ 追踪平衡解流形

图4是使用改进延拓法从任意点 $A(0,0,0,0,0)$ 追踪到的平衡解流形（图中的点画线是从任意点到起始点的追踪轨迹，下文图中点画线的意义若非特别声明，与此处相同）。

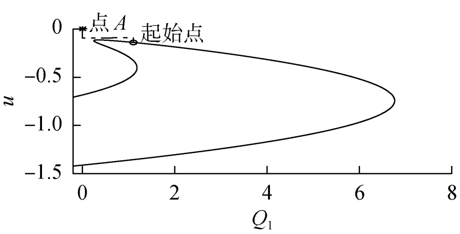


图4 从任意点 A 追踪到的平衡解流形

Fig.4 ESM tracked from arbitrary point A

从图4可以看出，该平衡解流形的电压都是负值，这是一条不常见平衡解流形，实际的电力系统，通常不可能运行于这条平衡解流形上，这仅仅是该系统纯数学理论意义下的平衡解流形。

5.3 从不同起始点追踪平衡解流形

图5是使用改进延拓法从不同的起始点追踪到的4条平衡解流形。

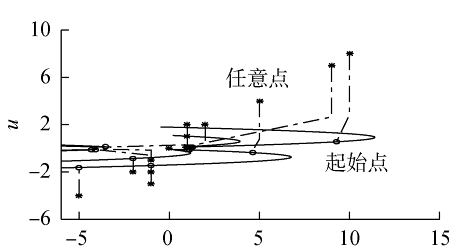


图5 改进延拓法追踪到的4条平衡解流形

Fig.5 Four ESMs traced by improved continuation method

从图5可看出，从不同任意点追踪到多个起始点。从不同的起始点出发，追踪到4条该系统纯数学理论意义下的平衡解流形。其局部放大图见图6。

图6中只保留了平衡解流形。其中曲线1是常见的平衡解流形，因为实际的电力系统只能运行于曲线1的上半部分。而曲线2—4都不常见，其中一个主要原因就是通常的平衡解流形都是通过解常规潮流方程得到起始点，而这个起始点都是位于曲线1上，它们只是该电力系统纯数学理论意义下的平衡解流形，至于其所反映的物理现象及其实际研究价值尚有待考究。

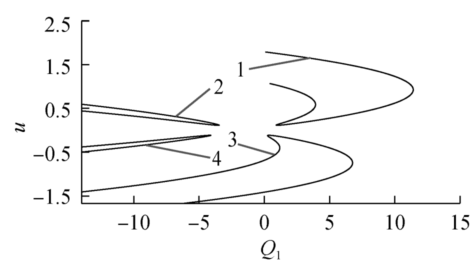


图6 图5的局部放大图

Fig.6 Partial amplification of fig.5

5.4 对比分析改进延拓法与 Matcont 的相应结果

图7给出了改进延拓法与 Matcont 追踪到的平衡解流形及搜索到的分岔点。

从图7可以看到，改进延拓法和 Matcont 追踪的平衡解流形是重合的。从宏观上讲，使用改进延拓

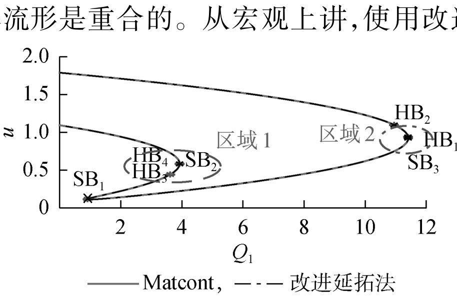


图7 改进延拓法与 Matcont 的平衡解流形、分岔点

Fig.7 ESMs and bifurcation points of improved continuation method and Matcont

法追踪电力系统平衡解流形的效果与使用 Matcont 的效果相当。Matcont 搜索出 7 个分岔点,改进延拓法得到 5 个分岔点,比 Matcont 搜索到的分岔点少 2 个(HB_3、HB_4)。由于分岔点的位置都很靠近,所以在图 7 中只标注一次,下文的情况与此相同,不再作说明。2 种方法分岔点的相关数据在表 2 中给出。改进延拓法平衡解流形的根轨迹图如图 8 所示(图中短线竖直线为虚轴)。

下面对比分析上述 2 种方法得到的分岔点,由表 2 中的特征值可以看出,Matcont 得到的霍普夫分岔点 HB_3、HB_4 所对应的 4 个特征值都为实数。由霍普夫分岔点的定义可知,这 2 个点不是霍普夫分岔点,此时 Matcont 出现了误判。改进延拓法得到的 5 个分岔点和 Matcont 得到的另外 5 个分岔点很接近。

从图 8 可知,根轨迹在 HB_1、HB_2 及其关于实轴对称的位置上穿越复平面的虚轴,与之对应的 2 个平衡点为霍普夫分岔点。根轨迹在 SB_1、SB_2、SB_3 从原点穿越虚轴,与之对应的 3 个平衡点为鞍结分岔点。除此之外,根轨迹不再有其他穿越虚轴的点。因此,该平衡解流形上,应该只有 5 个分岔点。其中改进延拓法求得的分岔点 HB_1、HB_2、SB_3 与文献[9,19]的结果一致。

为了便于说明问题,将图 7 中弯曲程度高的区域 1、区域 2 进行放大分析,如图 9 所示。

从图 9 可以看出,在弯曲程度高的区域,Matcont 追踪到的平衡解流形失真比较严重,而改进延拓法追踪到的平衡解流形失真较小。可见,追踪电力系统平衡解流形时,在弯曲程度高的区域,使用改进延拓法的效果比使用 Matcont 的效果要好。

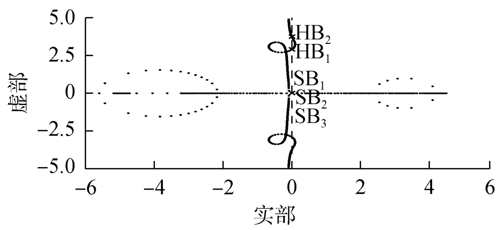


图 8　平衡解流形的根轨迹

Fig.8　Root locus of ESM

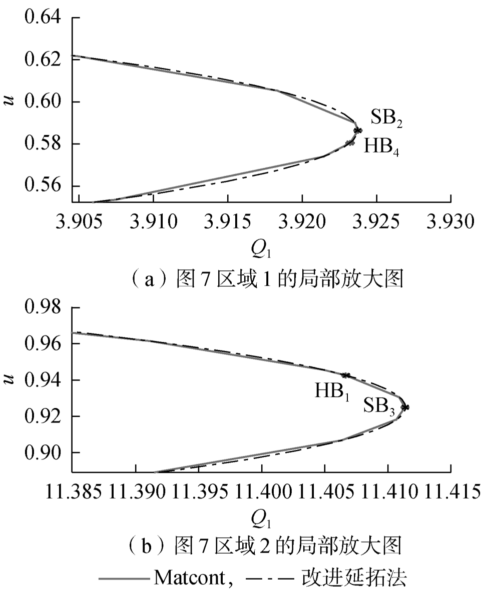


图 9　图 7 区域 1 的局部放大图

Fig.9　Partial amplification of region 1 in fig.7

5.5　对比分析改进延拓法与传统延拓法的相应结果

图 10 给出了改进延拓法与传统延拓法追踪到的平衡解流形,该图是在改进延拓法最大步长为传统延拓法最大步长的 10 倍的情况下绘制的。

表 2　改进延拓法与 Matcont 搜索到的分岔点

Table 2　Bifurcation points searched by improved continuation method and Matcont

Matcont 搜索到的 7 个分岔点			改进延拓法搜索到的 5 个分岔点		
类型	$(\delta_m,\omega,\delta,u,Q_1)$	对应的特征值	类型	$(\delta_m,\omega,\delta,u,Q_1)$	对应的特征值
SB_1	(2.070 583,0,0.151 936, 0.116 787,0.909 436)	76.311 809,−6.695 948, −0.000 004,−0.171 268	SB_1	(2.070 433,0,0.151 779, 0.116 787,0.909 414)	76.301 157,−6.697 399, 0.000 000,−0.171 282
SB_2	(3.121 393,0,0.086 159, 0.586 445,3.923 749)	−49.462 367,3.122 452, −2.982 824,−0.000 003	SB_2	(3.121 388,0,0.086 155, 0.586 445,3.923 742)	−49.464 068,3.122 457, −2.982 821,0.000 000
SB_3	(0.347 501,0,0.137 927, 0.924 965,11.411 364)	−89.150 764,0.000 050, −0.455 764+j2.733 081 4, −0.455 764−j2.733 081	SB_3	(0.347 538,0,0.137 965, 0.924 968,11.411 414)	−89.127 649,0.000 000 −0.455 971+j2.732 704, −0.455 971−j2.732 704
HB_1	(0.343 412,0,0.136 133, 0.942 566,11.406 656)	−92.656 665,−2.640 530, j2.894 834,−j2.894 834	HB_1	(0.343 450,0,0.136 171, 0.942 560,11.406 712)	−92.631 269,−2.640 568, 0.000 001+j2.894 484, 0.000 001−j2.894 484
HB_2	(0.310 055,0,0.120 004, 1.099 846,10.946 294)	−128.661 349,−15.374 986, j3.747 974,−j3.747 974	HB_2	(0.310 078,0,0.120 030, 1.099 881,10.946 167)	−128.645 845,−15.380 228, 0.000 001+j3.748 038, 0.000 001−j3.748 038
HB_3	(3.072 363,0,0.100 626, 0.443 743,3.618 557)	13.628 985,3.009 954, −3.009 953,−28.486 770			
HB_4	(3.119 999,0,0.086 762, 0.580 533,3.923 222)	−48.408 427,−3.045 401, 3.045 413,0.566 883			

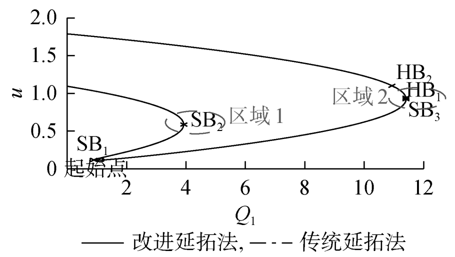


图 10 图 7 区域 2 的局部放大图

Fig.10 Partial amplification of region 2 in fig.7

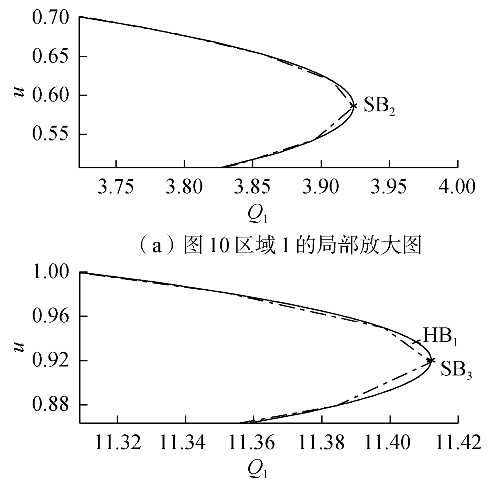
从图 10 可看出,改进延拓法与传统延拓法追踪到的平衡解流形是重合的。从宏观上讲,使用改进延拓法追踪电力系统的平衡解流形的效果与使用传统延拓法的效果相当。

传统延拓法使用抛物插值法来搜索分岔点。2 种方法都搜索到 5 个分岔点,且都已经标于图 10 中。分岔点的相关数据在表 3 中给出。

为了更好地说明问题,将图 10 中弯曲程度高的区域 1、区域 2 进行局部放大,得到图 11。将图 10 区域 2 的平衡解流形追踪过程(包括预测点和平衡点)显示在图 12 中。

从图 11 可以看出,在弯曲程度高的区域,传统延拓法追踪到的平衡解流形失真比较严重,而改进延拓法追踪到的平衡解流形失真较小。从图 11(b)还可以看出,传统延拓法一步就跨越了 SB_3、HB_1 这 2 个分岔点;改进延拓法并没有出现这种一步跨越这 2 个分岔点的现象,这与第 4.2 节的分析一致。

从图 12 可看出,在平衡解流形弯曲程度越高的区域,传统延拓法的预测点离平衡点越远,而改进延拓法的预测点离平衡点越近。这是因为传统延拓法,在平衡解流形弯曲程度剧烈改变的情况下,步长改变的速度常常跟不上平衡解流形的弯曲速度。这样步长就会与平衡解流形的弯曲程度不同步,导致预测点偏离平衡点较远;改进延拓法根据平衡解流形的曲率半径来修改步长,无论弯曲程度改变多快,步长



(a) 图 10 区域 1 的局部放大图

(b) 图 10 区域 2 的局部放大图

图 11 改进延拓法与传统延拓法追踪到的平衡解流形

Fig.11 ESMs tracked by improved continuation method and traditional continuation method

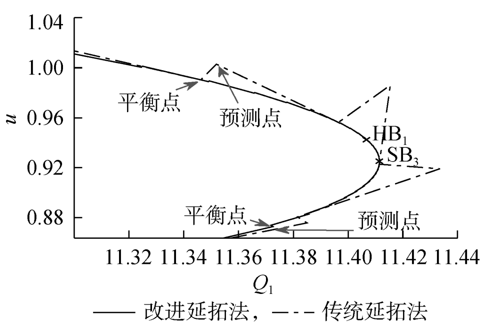


图 12 图 11 区域 1 的局部放大图

Fig.12 Partial amplification of region 1 in fig.11

的改变总保持与平衡解流形的弯曲速度同步。这与第 3.2 节"在弯曲程度越高的区域,预测点偏离平衡位置的距离反而越小,曲线越光滑"的结论一致。

需要说明的是,没有对 SB_1 附近区域进行放大说明,这主要是因为 SB_1 离起始点很近,传统延拓法

表 3 改进延拓法与传统延拓法搜索到的分岔点

Table 3 Bifurcation points searched by improved continuation method and traditional continuation method

传统延拓法搜索到的分岔点			改进延拓法搜索到的分岔点		
类型	$(\delta_m,\omega,\delta,u,Q_1)$	对应的特征值	类型	$(\delta_m,\omega,\delta,u,Q_1)$	对应的特征值
SB_1	(2.041 892,0,0.152 981, 0.115 920,0.910 401)	76.279 656,−6.702 654, 0.000 144,−0.171 429	SB_1	(2.070 433,0,0.151 779, 0.116 787,0.909 414)	76.301 157,−6.697 399, 0.000 000,−0.171 282
SB_2	(3.121 123,0,0.086 270, 0.585 315,3.923 671)	−49.464 244,3.122 316, −2.982 840,0.001 006	SB_2	(3.121 388,0,0.086 155, 0.586 445,3.923 742)	−49.464 068,3.122 457, −2.982 821,0.000 000
SB_3	(0.348 012,0,0.138 170, 0.922 951,11.411 305)	−89.129 132,0.000 102, −0.456 012+j2.732 691, −0.456 012−j2.732 691	SB_3	(0.347 538,0,0.137 965, 0.924 968,11.411 414)	−89.127 649,0.000 000, −0.455 971+j2.732 704, −0.455 971−j2.732 704
HB_1	(0.348 018,0,0.138 173, 0.922 920,11.411 317)	−92.637 134,−2.640 051, −0.000 070+j2.894 312, −0.000 070−j2.894 312	HB_1	(0.343 450,0,0.136 171, 0.942 560,11.406 712)	−92.631 269,−2.640 568, 0.000 001+j2.894 484, 0.000 001−j2.894 484
HB_2	(0.310 568,0,0.120 286, 1.097 399,10.958 978)	−128.692 817,−15.392 298, −0.000 089+j3.748 463, −0.000 089−j3.748 463	HB_2	(0.310 078,0,0.120 030, 1.099 881,10.946 167)	−128.645 845,−15.380 228, 0.000 001+j3.748 038, 0.000 001−j3.748 038

的步长还未增大到来不及减小的地步，此处失真较小。如果起始点远离 SB_1，那么在此区域失真的情况要比 SB_2、SB_3 附近严重得多。

传统延拓法之所以会在弯曲程度高的区域失真比较严重，主要是因为其步长减小的速度跟不上平衡解流形弯曲的速度。经历了起始点到 SB_3 之间（或者 SB_1 到 SB_2 之间）比较宽的平坦区域后，步长已经增加得很大了。在 SB_3（或者 SB_2）附近弯曲程度较高，步长减小的速度跟不上曲线弯曲的速度，因而步长来不及减小到与弯曲程度相匹配的程度，导致失真比较严重。若要让平衡解流形在弯曲程度高的区域失真较小，就要极大地缩小最大步长的值，如此就会大幅减小在平坦区域的追踪速度；若要保持在平坦区域较快的追踪速度，就要极大地增大最大步长的值，如此就会在弯曲程度高的区域失真较严重。对于传统延拓法而言，无法同时兼顾平坦区域的追踪速度和弯曲程度高区域的失真程度。

改进延拓法是根据平衡解流形的曲率半径来修改步长的，步长减小或增加的速度总是与平衡解流形弯曲的速度同步。无论平衡解流形弯曲的速度有多快，步长总是来得及增大或者减小到合适的值，因此使用改进延拓法追踪平衡解流形时，不仅在弯曲程度高的区域失真较小，且在平坦的区域又有足够快的追踪速度。换言之，改进延拓法同时兼顾了平坦区域的追踪速度和弯曲程度高的区域的失真程度。

从表 3 中的特征值可以看出，改进延拓法搜索到的分岔点的精度比传统延拓法搜索到的分岔点的精度高得多（如 SB_3 的特征值，改进延拓法为 0.000 000，而传统延拓法为 0.000 102）。传统延拓法使用抛物插值法搜索分岔点，当插入的点数较多时，单单是筛选较好的点作为分岔点这件事本身就是一项相当繁琐的工作。仅仅从这个层面上讲，改进延拓法所使用的两分搜索法就要比传统延拓法所使用的抛物插值法简洁得多。本文在处理器为 Intel（R） Core（TM） i3_4160 CPU@ 3.60 GHz 3.60 GHz，安装内存为 4.00 GB 的微机上，搜索到 5 个分岔点所花费的时间分别如下：0.065 512 s、0.057 218 s、0.029 921 s、0.011 147 s、0.017 311 s。

6　结论

本文将同伦法应用于解决追踪电力系统平衡解流形起始点的获取问题，能从一个任意点比较容易地获取平衡解流形上的一个起始点。且从不同的起始点出发，能追踪到多条电力系统纯数学理论意义下的平衡解流形。运用微分几何相关知识推导出了高维空间曲线曲率半径的计算公式，并使用曲率半径与两分搜索法结合起来对延拓法进行改进。改进后的延拓法使得平衡解流形不仅在弯曲程度高的区域失真较小，且在平坦区域的追踪速度较高，还能够解决抛物插值法在搜索分岔点时所面临的计算量大、精度不高、对分岔点筛选困难的问题。最后以典型的三节点电力系统为例进行数值仿真实验，将结果与 Matcont 以及传统延拓法所得到的相应结果进行对比，验证了本文所提方法的正确性与有效性。

参考文献：

[1] 林伟芳，孙华东，汤涌，等. 巴西“11·10”大停电事故分析及启示[J]. 电力系统自动化，2010，34（7）：1-5.
LIN Weifang，SUN Huadong，TANG Yong，et al. Analysis and lessons of the blackout in Brazil Power Grid on November 10，2009[J]. Automation of Electric Power Systems，2010，34（7）：1-5.

[2] 葛睿，董昱，吕跃春. 欧洲“11.4”大停电事故分析及对我国电网运行工作的启示[J]. 电网技术，2007，31（3）：1-6.
GE Rui，DONG Yu，LÜ Yuechun. Analysis of large-scale blackout in UCTE Power Grid and lessons to be drawn to power grid operation in China[J]. Power System Technology，2007，31（3）：1-6.

[3] 梁志峰，葛睿，董昱，等. 印度“7.30”、“7.31”大停电事故分析及对我国电网调度运行工作的启示[J]. 电网技术，2013，37（7）：1841-1848.
LIANG Zhifeng，GE Rui，DONG Yu，et al. Analysis of large-scale blackout occurred on July 30 and July 31，2012 in India and its lessons to China's Power Grid dispatch and operation[J]. Power System Technology，2013，37（7）：1841-1848.

[4] 汤涌，卜广全，易俊. 印度“7.30”、“7.31”大停电事故分析及启示[J]. 中国电机工程学报，2012，32（25）：167-174.
TANG Yong，BU Guangquan，YI Jun. Analysis and lessons of the blackout in Indian Power Grid on July 30 and 31，2012[J]. Proceedings of the CSEE，2012，32（25）：167-174.

[5] 彭志炜，胡国根，韩祯祥. 电力系统 PV 曲线的追踪与极值分叉点的确定[J]. 电网技术，1997，21（8）：13-16.
PENG Zhiwei，HU Guogen，HAN Zhenxiang. Tracing power system PV curves and searching for bifurcation points[J]. Power System Technology，1997，21（8）：13-16.

[6] 彭志炜，胡国根，韩祯祥. 电力系统平衡解流形的追踪与电压失稳分叉点的搜索[J]. 中国电机工程学报，1998，18（3）：173-177.
PENG Zhiwei，HU Guogen，HAN Zhenxiang. Tracing of the power system equilibrium solution manifold and searching for the instability bifurcation point[J]. Proceedings of the CSEE，1998，18（3）：173-177.

[7] 蔡松柏，沈蒲生. 关于非线性方程组求解技术[J]. 湖南大学学报（自然科学版），2000，27（3）：86-91.
CAI Songbai，SHEN Pusheng. On the mechods solving nonlinear equations[J]. Journal of Hunan University（Natural Sciences Edition），2000，27（3）：86-91.

[8] 王奇，刘明波. 一种识别极限诱导分岔点的改进连续潮流算法[J]. 华南理工大学学报（自然科学版），2008，36（2）：133-138.
WANG Qi，LIU Mingbo. An improved continuous power flow algorithm for identifying lim it induced bifurcation point[J]. Journal of South China University of Technology（Natural Science Edition），2008，36（2）：133-138.

[9] 张卫，刘三明，魏丹，等. 一种追踪电力系统平衡解流形的改进方法[J]. 电力学报，2014，29（5）：384-389.
ZHANG Wei，LIU Sanming，WEI Dan，et al. An improved method used to track the power system equilibrium solution manifold[J]. Journal of Electric Power，2014，29（5）：384-389.

[10] 柳伟，顾伟，徐荆州. 基于预测-校正的同伦延拓法追踪高维 Hopf 分岔点研究[J]. 电力自动化设备，2009，29（9）：65-69.
LIU Wei，GU Wei，XU Jingzhou. Prediction-correction homotopy continuation method for high-dimension Hopf bifurcation point tracking[J]. Electric Power Automation Equipment，2009，29（9）：65-69.

[11] 彭志炜，胡国根，韩祯祥. 基于分叉理论的电力系统电压稳定性分析[M]. 北京：中国电力出版社，2005：34-35.

[12] 赵兴勇,张秀彬,苏小林. 一种电力系统稳定性动态分析的统一方法[J]. 高电压技术,2008,34(10):2195-2199.
ZHAO Xingyong,ZHANG Xiubin,SU Xiaolin. Integrated method of dynamic analysis of power system stability[J]. High Voltage Engineering,2008,34(10):2195-2199.
[13] 周双喜,冯治鸿,杨宁. 大型电力系统 PV 曲线的求取[J]. 电网技术,1996,20(8):4-8.
ZHOU Shuangxi,FENG Zhihong,YANG Ning. Seeking PV curves in Bulk Power System[J]. Power System Technology,1996,20(8):4-8.
[14] 蔡伟程,代静. 对求取电力系统 PV 曲线的连续潮流法的改进[J]. 电力系统及其自动化学报,2005,17(5):82-85.
CAI Weicheng, DAI Jing. Improvement of continuation method in tracing PV curves of power systems[J]. Proceedings of the CSU-EPSA,2005,17(5):82-85.
[15] 安祎春,张庆灵,邢伟. 基于 Moore-Spence 扩展方程电力系统 Hopf 分岔点的降阶新算法[J]. 继电器,2007,35(增刊1):359-364.
AN Yichun, ZHANG Qingling, XING Wei. Moore-spence extended equations based reduction new method for computing Hopf bifurcation points of power system[J]. Relay, 2007, 35(Supplyment 1):359-364.
[16] 祝达康,程浩忠. 求取电力系统 PV 曲线的改进连续潮流法[J]. 电网技术,1999,23(4):39-42.
ZHU Dakang,CHENG Haozhong. An improved continuation method in tracing PV curves of power systems[J]. Power System Technology,1999,23(4):39-42.
[17] 王红燕,蔡亮,祁中建. 求取电力系统 PV 曲线的改进连续潮流算法[J]. 电气技术,2011(7):28-31.
WANG Hongyan, CAI Liang, QI Zhongjian. Improved contiunation power flow in tracing PV curves of power systems[J]. Electrical Engineering,2011(7):28-31.
[18] 胡国根,彭志炜. 研究电力系统电压动态稳定性的一种新方法(上):分析方法[J]. 电力系统自动化,1999,23(21):32-36.
HU Guogen,PENG Zhiwei. A new method for studying the voltage dynamic stability of power system by using bifurcation theory - part one analysis method[J]. Automation of Electric Power Systems,1999,23(21):32-36.
[19] 彭志炜,胡国根. 研究电力系统电压动态稳定性的一种新方法(下):实例分析[J]. 电力系统自动化,1999,23(22):40-44.
PENG Zhiwei,HU Guogen. A new method for studying the voltage dynamic stability of power system by using bifurcation theory - part two case study[J]. Automation of Electric Power Systems,1999,23(22):40-44.
[20] 王成山,江伟,江晓东. 一种新的电力系统鞍型分叉点计算方法[J]. 中国电机工程学报,1999,19(8):20-24.
WANG Chengshan,JIANG Wei,CJIANG Hsiaodng. A new computation method for saddle-node bifurcation point of power system[J]. Proceedings of the CSEE,1999,19(08):20-24.
[21] 彭志炜,胡国根,韩祯祥. 追踪电力系统平衡解流形的一种新算法[J]. 贵州工业大学学报,1997(1):48-53.
PENG Zhiwei, HU Guogen, HAN Zhenxiang. A new algorithm of tracing the power system equilibrium solution manifold[J]. Journal of Guizhou University of Technology,1997(1):48-53.
[22] 李庆扬. 解非线性方程组的离散型延拓法[J]. 数值计算与计算机应用,1984(2):114-124.
LI Qingyang. A discrete-type continuation method for solving systems of nonlinear equations[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications,1984(2):114-124.
[23] 李庆扬,莫孜中,祁力群. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京:科学出版社,1987:286.
[24] AJJARAPU V,LEE B. Bifurcation theory and its application to nonlinear dynamical phenomena in an electrical power system[J]. IEEE Transactions on Power Systems,1992,7(1):424-431.
[25] 梅向明,黄敬之. 微分几何[M]. 北京:高等教育出版社,2008:347.

作者简介:

吕智林

吕智林(1971—),女,广西南宁人,教授,博士,研究方向为智能电网、系统优化及复杂系统集成控制等(**E-mail**:luzhilin2001@163.com);

杨再学(1986—),男,广西百色人,硕士研究生,主要研究方向为微电网电压稳定性(**E-mail**:zxyang06@foxmail.com);

王先齐(1991—),男,湖北武汉人,硕士研究生,主要研究方向复杂系统建模与优化(**E-mail**:wxq_20150612@163.com)。

Improved continuation method based on curvature radius and bisection-search method

LÜ Zhilin,YANG Zaixue,WANG Xianqi

(College of Electrical Engineering,Guangxi University,Nanning 530004,China)

Abstract:There exist problems in tracking the ESM(Equilibrium Solution Manifold) of power system by the traditional continuation method,i.e.,serious local distortion,large computational amount and low precision in searching the bifurcation points. In order to address these issues,an improved continuation method based on curvature radius and bisection-search method is proposed. The improvement based on curvature radius makes ESM have low distortion degree in high-bending area and fast tracking speed in flat area,while the improvement based on bisection-search method simplifies the searching steps of bifurcation point,reduces the calculation amount and improves the accuracy. A typical three-bus power system is taken as an example for numerical simulation experiment. Firstly,the automatic homotopy method is adopted to obtain the start point of ESM from arbitrary points. Secondly,the multiple ESM curves under pure mathematical theory are tracked down from different start points,and then,the bisection-search method is adopted to search the bifurcation points of the ESM. Finally,the correctness and effectiveness of the proposed method are verified by the comparson of the results obtained by Matcont software package and traditional continuation method.

Key words:continuation method;equilibrium solution manifold;bifurcation point;curvature radius;bisection-search method;electric power systems