

考虑 $N-1$ 故障的安全约束机组组合模型及约束削减方法

王砚平¹, 鲍威¹, 李赢², 姚斯磊², 郭瑞鹏¹, 林玲¹, 况静¹

(1. 浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027; 2. 国网浙江省电力有限公司舟山供电公司, 浙江 舟山 316000)

摘要:考虑 $N-1$ 故障的安全约束机组组合问题规模庞大, 对其进行数值求解十分困难。为此, 基于直流潮流和线路开断分布因子, 建立混合整数线性规划模型并提出约束削减方法。约束削减方法包括两步: 根据并联支路潮流之间的关系选出需要监视的支路, 以减少并联支路的安全约束; 推导故障态潮流的上界, 将其与故障态支路容量进行比较, 以消除冗余的故障态安全约束。该约束削减方法可以在不改变最优解的前提下, 大幅缩减安全约束机组组合问题的规模以及求解时间。IEEE 30和IEEE 118节点测试系统的仿真分析结果验证了所提模型及约束削减方法的有效性。

关键词:安全约束机组组合; $N-1$ 故障; 混合整数线性规划; 约束削减方法; 监视支路; 故障态潮流上界

中图分类号: TM 73

文献标志码: A

DOI: 10.16081/j.epae.202105002

0 引言

安全约束机组组合 SCUC (Security-Constrained Unit Commitment) 作为编制发电计划的核心环节, 在电力系统优化调度等方面具有十分重要的意义^[1]。SCUC具有高维、非凸、离散、非线性的特点, 在数学上是一个 NP-hard (Non-deterministic Polynomial hard) 问题, 因此难以在有限的时间内求得最优解。为了解决该问题, 国内外学者对 SCUC 问题的建模和求解方法展开了深入的研究, 提出 Benders 分解法^[2-3]、分支定界法^[4]、拉格朗日松弛法^[5]和人工智能算法^[6]等多种方法。目前, 解决 SCUC 问题较为常用的方法是将 SCUC 建模为一个混合整数线性规划 MILP (Mixed-Integer Linear Programming) 问题, 并通过商业优化软件中的分支定界法进行求解^[7]。该方法建模灵活, 求解效率高, 并且可以确保 SCUC 问题收敛到最优解。

为了增强电力系统的鲁棒性和抗冲击能力, 在 SCUC 问题中逐渐开始考虑 $N-1$ 故障以及相应的故障态安全约束, 但这给求解 SCUC 问题带来了很大的困难, 大量的故障态安全约束使 SCUC 问题的规模变得非常庞大, 对该大规模问题进行数值求解将会非常耗时。因此, 削减 SCUC 问题的规模是对其进行高效求解的关键。

文献[8-9]表明, SCUC 问题中有大量的冗余约束, 通过识别并删除这些约束可以在不改变最优解的前提下缩小 SCUC 问题的规模。文献[8]通过求解一系列小规模 MILP 问题, 给出约束冗余的充分条件, 但该方法仅针对基态安全约束, 没有考虑故障

态冗余约束的识别。文献[10]通过对预想故障集进行过滤来削减需要考虑的故障态约束数目, 但该方法过滤后的安全约束仍较多, SCUC 问题的求解速度仍然很慢。文献[11]基于迭代过程提出一种削减安全约束的方法, 该方法首先求解只含基态安全约束的 SCUC 问题, 然后检查故障态约束是否满足, 将未满足的约束逐一添加到 SCUC 问题并再次求解, 直到所有约束都被满足, 通常该方法可以在短时间内完成对 SCUC 问题的求解, 但在某些情况下可能需要进行多次迭代, 求解仍然很耗时。文献[12]通过求解一个辅助优化问题来消除冗余约束, 但该方法主要用于削减安全约束最优潮流 SCOPF (Security-Constrained Optimal Power Flow) 问题的规模, 对 SCUC 问题的削减效果并不是很好。

在实际电网中, 并联支路的比例很高^[13]。根据文献[9], 华东电网 2017 年夏季高峰运行方式下共有 4 529 个输电断面, 包括 10 108 条支路, 其中约 55.2% 为并联支路。因此, 可以根据并联支路之间的潮流关系对冗余的安全约束进行削减^[14]。另一方面, 文献[15]指出故障态潮流与基态潮流间存在依存关系, 并通过线路开断分布因子 LODF (Line Outage Distribution Factor) 将故障态潮流表示为基态潮流的线性函数, 因此, 可以根据该线性关系预先计算出可能的最大故障态潮流, 并将其与故障态约束进行比较, 以识别冗余约束。

基于以上讨论, 本文提出一种考虑 $N-1$ 故障的 SCUC 问题的 MILP 模型, 并提出一种相关的约束削减方法。所提出的 MILP 模型用直流潮流表示基态约束, 用线路开断分布因子表示故障态约束。所提出的约束削减方法包括两步: 首先根据并联支路潮流之间的关系减少需要监视的支路数; 然后, 根据基态潮流的最大值推导出最大故障态潮流, 并将其与故障态容量进行比较识别出冗余的故障态约束。这

收稿日期: 2020-08-06; 修回日期: 2021-03-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51777184)

Project supported by the National Natural Science Foundation of China (51777184)

种约束削减方法几乎不需要额外的计算量,可以在不改变最优解的前提下,大幅缩短求解时间。IEEE 30和IEEE 118节点测试系统的仿真分析验证了所提模型及约束削减方法的正确性和有效性。

1 SCUC的MILP模型

1.1 目标函数

SCUC目标函数的混合整数线性表达^[16]为:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \left(\sum_{a=1}^S \lambda_{a,i} p_{a,i,t}^s + C_{i,t}^U + C_{i,t}^D \right) \quad (1)$$

其中, T 和 I 分别为时段数和机组数目; S 为机组费用曲线分段数; $\lambda_{a,i}$ 为机组 i 发电费用曲线分段线性化后分段 a 的斜率; $p_{a,i,t}^s$ 为 t 时段机组 i 在分段 a 上的出力,其满足式(2)所示约束; $C_{i,t}^U$ 和 $C_{i,t}^D$ 分别为 t 时段机组 i 的开机费用和关机费用。

$$\begin{cases} p_{Gi,t} = \sum_{a=1}^S p_{a,i,t}^s \\ 0 \leq p_{a,i,t}^s \leq P_i^{s,\max} u_{i,t} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $a=1, 2, \dots, S; i=1, 2, \dots, I; t=1, 2, \dots, T; p_{Gi,t}$ 为 t 时段机组 i 的有功出力; $P_i^{s,\max}$ 为机组出力分段后机组 i 每段出力的最大值; $u_{i,t}$ 为表示 t 时段机组 i 状态的0-1变量(机组开机时取1,关机时取0)。

$C_{i,t}^U$ 和 $C_{i,t}^D$ 分别满足如下约束:

$$\begin{cases} C_{i,t}^U \geq V_i (u_{i,t} - u_{i,t-1}) \\ C_{i,t}^U \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} C_{i,t}^D \geq W_i (u_{i,t-1} - u_{i,t}) \\ C_{i,t}^D \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $i=1, 2, \dots, I; t=1, 2, \dots, T; V_i$ 和 W_i 分别为机组 i 的开机费用和关机费用; $u_{i,0}$ 表示机组 i 的初始状态。

1.2 基态约束

(1)功率平衡约束。

$$\sum_{i=1}^I p_{Gi,t} = D_t \quad t=1, 2, \dots, T \quad (5)$$

其中, D_t 为 t 时段系统的总负荷。

(2)发电机出力约束。

$$P_{Gi}^{\min} u_{i,t} \leq p_{Gi,t} \leq P_{Gi}^{\max} u_{i,t} \quad i=1, 2, \dots, I; t=1, 2, \dots, T \quad (6)$$

其中, $P_{Gi}^{\min}$ 和 $P_{Gi}^{\max}$ 分别为机组 i 的最小和最大出力。

(3)最小启停时间约束。

文献[16]给出最小启停时间约束的混合线性整数表达。最小开机时间约束按时间顺序分为3段:约束式(7)表示机组开机时间受机组调度前状态影响;约束式(8)用于后续的时段,表示在连续的 U_i^T (机组 i 的最小开机时段数)个时段内机组需要满足最小开机时间约束;约束式(9)表示最后 U_i^T-1 个时段内的最小开机约束,一旦机组在该时段内开机,就需要持续开机到调度结束。

$$\sum_{t=1}^{O_i} (1 - u_{i,t}) = 0 \quad i=1, 2, \dots, I \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=t}^{t+U_i^T-1} u_{i,n} &\geq U_i^T (u_{i,t} - u_{i,t-1}) \\ i &= 1, 2, \dots, I; t = O_i + 1, \dots, T - U_i^T + 1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=t}^T [u_{i,n} - (u_{i,t} - u_{i,t-1})] &\geq 0 \\ i &= 1, 2, \dots, I; t = T - U_i^T + 2, \dots, T \end{aligned} \quad (9)$$

其中, O_i 为机组 i 从初始时段起必须持续开机的时段数, $O_i = \min \{T, (U_i^T - U_i^0)u_{i,0}\}$, U_i^0 为0时段前机组 i 已经持续开机的时段数。

类似地,最小关机时间约束也按时间分为3段:

$$\sum_{t=1}^{L_i} u_{i,t} = 0 \quad i=1, 2, \dots, I \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=t}^{t+D_i^T-1} (1 - u_{i,n}) &\geq D_i^T (u_{i,t-1} - u_{i,t}) \\ i &= 1, 2, \dots, I; t = L_i + 1, \dots, T - D_i^T + 1 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=t}^T [1 - u_{i,n} - (u_{i,t-1} - u_{i,t})] &\geq 0 \\ i &= 1, 2, \dots, I; t = T - D_i^T + 2, \dots, T \end{aligned} \quad (12)$$

其中, L_i 为机组 i 从初始时段起必须持续关机的时段数, $L_i = \min \{T, (D_i^T - S_i^0)(1 - u_{i,0})\}$, D_i^T 为机组 i 的最小关机时段数, S_i^0 为0时段以前机组 i 已经持续关机的时段数。

(4)爬坡约束。

本文中爬坡约束也考虑开关机时的出力限制:

$$p_{Gi,t} - p_{Gi,t-1} \leq R_i^U u_{i,t-1} + S_i^U (u_{i,t} - u_{i,t-1}) + P_{Gi}^{\max} (1 - u_{i,t}) \quad (13)$$

$$p_{Gi,t-1} - p_{Gi,t} \leq R_i^D u_{i,t} + S_i^D (u_{i,t-1} - u_{i,t}) + P_{Gi}^{\max} (1 - u_{i,t-1}) \quad (14)$$

其中, $i=1, 2, \dots, I; t=1, 2, \dots, T; R_i^U$ 和 R_i^D 分别为机组 i 在开机状态下出力上升量和下降量的限制; S_i^U 和 S_i^D 分别为机组 i 在开关机时刻出力上升量和下降量的限制; $p_{Gi,0}$ 为机组 i 的初始出力。

(5)网络安全约束。

$$|P_{Bj}^0| = |-b_j(\theta_\alpha - \theta_\beta)| \leq F_j^{\max} \quad j \in S_B \quad (15)$$

其中, P_{Bj}^0 为基态下支路 j 的有功潮流(有功功率流); b_j 为支路 j 的电纳; θ_α 和 θ_β 分别为支路 j 所连接节点 α 和 β 的电压相角,它们满足式(16)所示直流法潮流方程; $F_j^{\max}$ 为支路 j 的长期允许载流量; S_B 为支路集合。

$$B\theta_t = K_P P_t - K_D D_t \quad t=1, 2, \dots, T \quad (16)$$

其中, B 为节点电纳矩阵; K_P 为节点机组关联矩阵; K_D 为节点负荷关联矩阵; θ_t 、 P_t 、 D_t 分别为 t 时段的节点电压相角向量、机组有功出力向量、负荷向量。

1.3 故障态安全约束

为增强电力系统的鲁棒性以及抗冲击能力,在SCUC模型中考虑 $N-1$ 故障以及相应的故障态安全

约束。由于该SCUC模型基于直流潮流,安全约束只考虑线路的潮流约束。根据线路开断分布因子,故障态安全约束为^[11]:

$$|P_{Bj}^k| = \left| P_{Bj}^0 + \sum_{i \in S_F^k} L_{j,i}^k P_{Bi}^0 \right| \leq E_j^{\max} \quad k \in C; j \in S_B^k \quad (17)$$

其中, P_{Bj}^k 为故障态 k 下支路 j 的故障态潮流; S_F^k 为故障态 k 下开断支路的集合; $L_{j,i}^k$ 为故障态 k 下开断支路 i 对未开断支路 j 的线路开断分布因子; $E_j^{\max}$ 为支路 j 的短期允许载流量; C 为 $N-1$ 故障集合; S_B^k 为故障态 k 下未开断支路的集合。本文中, C 包括支路和母线的 $N-1$ 故障, 其中母线的 $N-1$ 故障等效于与之相连的线路全部故障。值得注意的是, 母线故障可能对潮流影响较大, 因此上述线性化潮流可能不适用于某些高精度场合, 在该情况下, SCUC 模型的解可被当作近似解, 或作为交流潮流 SCUC 模型的一个较理想的热启动初值。

本节给出的 SCUC 模型是一个 MILP 问题, 可以通过商用求解器(分支定界法)求解。但是由于考虑了 $N-1$ 故障, 该 SCUC 问题的规模十分庞大, 对其求解相当耗时。因此, 接下来将介绍一些快速高效的约束削减方法, 以减小 SCUC 问题规模, 加快求解速度。

2 并联支路安全约束削减

本节将根据并联支路潮流之间的关系, 选出潮流最容易越限的支路作为监视支路, 以减少并联支路的安全约束。

首先考虑 h 条并联支路潮流之间的关系。根据式(15), 这 h 条并联支路上的潮流之比等于电纳之比, 即 $P_{B1}^0 : P_{B2}^0 : \dots : P_{Bh}^0 = b_1 : b_2 : \dots : b_h$ 。因此可以定义一个常系数来表示某条支路上潮流占该组并联支路总潮流的比例:

$$K_j = \frac{P_{Bj}^0}{\sum_{i=1}^h P_{Bi}^0} = \frac{b_j}{\sum_{i=1}^h b_i} \quad j = 1, 2, \dots, h \quad (18)$$

对于没有并联支路(单支路)的输电断面, 监视支路即为输电断面唯一的支路, 相应的系数 $K_j = 1$ 。

根据以上讨论, 支路 j 上的潮流可以表示为

$$\left| \sum_{i=1}^h P_{Bi}^0 \right| |K_j|, \text{ 进而可以将支路的安全约束改写为 } \left| \sum_{i=1}^h P_{Bi}^0 \right| |K_j / F_j^{\max}| \leq 1. \text{ 对于该组支路而言, 当并联支路}$$

总潮流 $\left| \sum_{i=1}^h P_{Bi}^0 \right|$ 增长时, $|K_j / F_j^{\max}|$ 最大的支路将会最先违背其潮流约束。因此, 只要满足 $|K_j / F_j^{\max}|$ 最大的支路潮流约束, 就能满足该组并联支路中其他支路的安全约束, 即:

$$\left| \sum_{i=1}^h P_{Bi}^0 \right| \left| \frac{K_j}{F_j^{\max}} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^h P_{Bi}^0 \right| \max \left\{ \left| \frac{K_j}{F_j^{\max}} \right| \right\} \leq 1 \quad (19)$$

因此, 基态下监视支路为:

$$\operatorname{argmax}_{j=1, 2, \dots, h} \left\{ \left| \frac{K_j}{F_j^{\max}} \right| \right\} \quad (20)$$

类似地, 故障态下监视支路为:

$$\operatorname{argmax}_{j \in D_h^k} \left\{ \left| \frac{K_j}{E_j^{\max}} \right| \right\} \quad (21)$$

其中, D_h^k 为故障态 k 下 h 条并联支路中未开断支路的集合。

在选择监视支路之后, 非监视支路上的潮流可以用监视支路的潮流来表示:

$$P_{Bj}^0 = \frac{K_j}{K_{M_j}} P_{BM_j}^0 \quad j \in S_B \quad (22)$$

其中, M_j 为支路 j 所属并联支路组的监视支路。

根据上述分析, 可以消除非监视支路的安全约束和相关潮流变量, 对每组并联支路只保留一条支路的安全约束, 从而将安全约束式(15)和式(17)分别简化为:

$$|P_{Bj}^0| = |-b_j(\theta_\alpha - \theta_\beta)| \leq F_j^{\max} \quad j \in S_{BM}^0 \quad (23)$$

$$|P_{Bj}^k| = \left| \frac{K_j}{K_{M_j}} P_{BM_j}^0 + \sum_{i \in S_F^k} \frac{L_{j,i}^k K_i}{K_{M_i}} P_{Bi}^0 \right| \leq E_j^{\max} \quad k \in C; j \in S_{BM}^k \quad (24)$$

其中, S_{BM}^0 和 S_{BM}^k 分别为基态和故障态 k 下监视支路的集合。

本节将一组并联支路的安全约束削减为一条监视支路的安全约束, 该方法在并联支路数量较多的系统中将有更好的效果。另一方面, 在确定一组并联支路的监视支路之后, 可以为各支路的基态潮流确定一个更小的上界, 这有助于求出更小的故障态潮流上界, 可以对故障态安全约束进行进一步的削减。

3 故障态安全约束削减

在进行第2节阐述的并联支路安全约束削减后, 仍有可能进一步削减 SCUC 问题中包含的大量故障态安全约束。本节将基于第2节中得出的结论, 进行单断面相关故障态安全约束削减、一般形式故障态安全约束削减, 以及两断面相关故障态安全约束削减。

3.1 单断面相关故障态安全约束削减

对于包含多条并联支路的单断面, 其相关故障态安全约束可以等价于对基态监视支路潮流的限制。据此可以对这种简单形式的故障态安全约束进行削减。

考虑如图1所示的输电断面,其包含 h 条并联支路。在基态下,这组并联支路中的监视支路为 M_h 。在支路 i 开断的故障态 k_i 下,这组并联支路中的监视支路设为 z_i 。根据式(24),支路 z_i 的安全约束为:

$$|P_{Bz_i}^{k_i}| = \left| \frac{K_{z_i}}{K_{M_h}} P_{BM_h}^0 + \frac{L_{z_i,i}^{k_i} K_i}{K_{M_h}} P_{BM_h}^0 \right| \leq E_{z_i}^{\max} \quad (25)$$

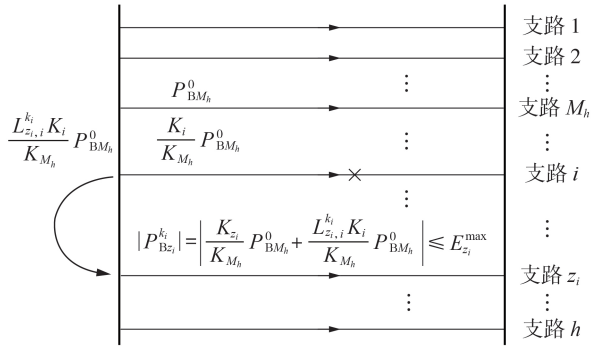


图1 单输电断面相关故障态安全约束说明图

Fig.1 Illustration diagram of post-contingency security constraints of single transmission section

式(25)等价于:

$$|P_{BM_h}^0| \leq \frac{E_{z_i}^{\max} |K_{M_h}|}{|K_{z_i} + L_{z_i,i}^{k_i} K_i|} \quad (26)$$

注意到式(26)仅为变量 $P_{BM_h}^0$ 的约束,因此,可以将监视支路 M_h 的基态安全约束以及形如式(25)所示的故障态安全约束削减为如下约束:

$$|P_{BM_h}^0| \leq F_{M_h}^* = \min \left\{ \min_{i=1,2,\dots,h} \left\{ \frac{E_{z_i}^{\max} |K_{M_h}|}{|K_{z_i} + L_{z_i,i}^{k_i} K_i|} \right\}, F_{M_h}^{\max} \right\} \quad (27)$$

其中, $F_{M_h}^*$ 为监视支路 M_h 基态潮流的上限。

约束式(27)为基态潮流 $P_{BM_h}^0$ 提供了一个比 $F_{M_h}^{\max}$ 更小的上限,这有助于削减其他形式的故障态安全约束。

3.2 一般形式故障态安全约束削减

本节将通过推导出最大故障态潮流来削减一般形式的故障态安全约束。最大故障态潮流指在满足某些非故障态约束的前提下故障态潮流的上界。本节将根据系统参数确定该上界,确保其取值为一个常数而与变量无关,从而可以在求解SCUC问题前通过比较该常数与允许载流量来确定并削减冗余的故障态安全约束。

故障态安全约束削减说明图如图2所示,图中 Y_j^{General} 为 $|P_{Bj}^k|$ 的上界。若故障态潮流上界小于支路短期允许载流量,则总是满足相应的故障态安全约束,即该约束是冗余的,可以在不改变SCUC问题最优解的前提下将其删除。本节将在SCUC的基态约

束全部被满足时,根据故障态潮流与基态潮流的线性关系,推导出可能的最大故障态潮流,并以此削减故障态安全约束。

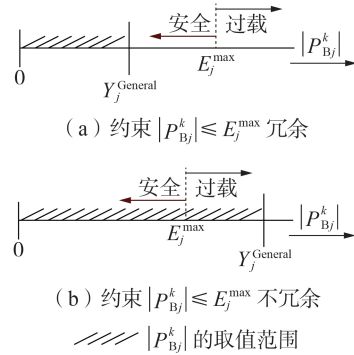


图2 故障态安全约束削减说明图

Fig.2 Illustration diagram of post-contingency security constraints elimination

本节需要推导故障态潮流的上界,以进行冗余故障态安全约束削减。故障态上界的推导包括基态潮流上界与故障态潮流上界两部分:基态潮流上界根据监视支路安全约束和基态安全约束实现;故障态潮流上界可以根据线路开断分布因子提供的故障态潮流与基态潮流之间的线性函数关系,由三角不等式及基态潮流上界得到。

3.2.1 基态潮流上界

由于故障态潮流是基态潮流的线性函数式(17),因此在推导故障态潮流上界之前需要先讨论基态潮流的上界。在基态安全约束均满足的情况下,基态潮流的上界由监视支路的安全约束确定。

根据支路与监视支路间潮流关系,可以推导出这种情况下基态潮流 P_{Bj}^0 的上界 X_j^{General} :

$$|P_{Bj}^0| = \left| \frac{K_j}{K_{M_j}} \right| |P_{BM_j}^0| \leq \left| \frac{K_j}{K_{M_j}} \right| F_{M_j}^* = X_j^{\text{General}} \quad (28)$$

需要注意的是,根据监视支路的定义, X_j^{General} 总是小于或等于长期允许载流量 $F_j^{\max}$:

$$\left| \frac{K_j}{F_j^{\max}} \right| \leq \left| \frac{K_{M_j}}{F_{M_j}^{\max}} \right| \leq \left| \frac{K_{M_j}}{F_{M_j}^*} \right| \Rightarrow X_j^{\text{General}} = \left| \frac{K_j}{K_{M_j}} \right| F_{M_j}^* \leq F_j^{\max} \quad (29)$$

因此,支路 j 本身的安全约束不需要考虑。

3.2.2 故障态潮流上界

基于上述基态潮流的上界和式(17)所示故障态潮流的表达式,可以推导出故障态潮流 P_{Bj}^k 的上界 Y_j^{General} :

$$|P_{Bj}^k| = \left| P_{Bj}^0 + \sum_{i \in S_F^k} L_{j,i}^{k_i} P_{Bi}^0 \right| \leq |P_{Bj}^0| + \sum_{i \in S_F^k} |L_{j,i}^{k_i}| |P_{Bi}^0| \leq X_j^{\text{General}} + \sum_{i \in S_F^k} |L_{j,i}^{k_i}| X_i^{\text{General}} = Y_j^{\text{General}} \quad (30)$$

根据 Y_j^{General} 的表达式,它是一个由系统参数确

定的常数,因此在对SCUC问题进行求解之前,就可将其计算出来以削减故障态安全约束。

3.2.3 故障态安全约束削减

如图2所示,如果故障态潮流的上界小于或等于支路短期允许载流量,即:

$$Y_j^{\text{General}} \leq E_j^{\text{max}} \quad (31)$$

则有:

$$|P_{Bj}^k| \leq Y_j^{\text{General}} \leq E_j^{\text{max}} \quad (32)$$

可知,当条件式(31)成立时,约束 $|P_{Bj}^k| \leq E_j^{\text{max}}$ 是冗余的,因此可以在不改变SCUC问题最优解的前提下将其删除,从而达到削减SCUC问题规模的目的。

3.3 两断面相关故障态安全约束削减

当研究涉及两输电断面的故障态安全约束时,不仅可以考虑基态安全约束的限制,还可以引入其他相关故障态安全约束的限制,推导出更有效的故障态潮流上界,以进一步削减故障态安全约束。

本节考虑经过3.1、3.2节削减后的所有剩余两断面相关故障态安全约束。对所有两断面相关故障态安全约束进行成对的枚举,当一对约束仅与相同的2个输电断面相关时,可以探究其中一个约束被满足时另一个约束的有效性。

具体判别过程与3.2节类似:首先在满足某些故障态约束的情况下进行基态潮流上界的推导;然后根据线路开断分布因子提供的故障态潮流与基态潮流之间的线性函数关系,由三角不等式及基态潮流上界得到故障态潮流的上界;最后,基于该上界对冗余的故障态安全约束进行削减。

考虑支路 m 和 n 分别属于2个不同的输电断面,与它们相关的故障态安全约束如下:

$$|P_{Bm}^{k_1}| = |P_{Bm}^0 + L_{m,n}^{k_1} P_{Bn}^0| \leq E_m^{\text{max}} \quad (33)$$

$$|P_{Bn}^{k_2}| = |P_{Bn}^0 + L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0| \leq E_n^{\text{max}} \quad (34)$$

注意到式(33)与式(34)具有相似的形式,当其中一个约束被满足时,另一个约束可能是冗余的。为不失一般性,接下来介绍当约束式(34)被满足时,如何推导 $|P_{Bm}^{k_1}|$ 的上界,以消除约束式(33)。也可以类似地消除约束式(34)。

3.3.1 基态潮流上界

在推导故障态潮流上界之前仍然需要确定基态潮流 $|P_{Bm}^0|$ 和 $|P_{Bn}^0|$ 的上界。与一般情况下基态潮流的上界不同,这种情况下基态潮流的上界不但受到监视支路安全约束的限制,还受到故障态安全约束的限制。

由于推导证明过程较为繁琐,在此直接给出此时基态潮流 $|P_{Bm}^0|$ 和 $|P_{Bn}^0|$ 上界 X_m^{Special} 与 X_n^{Special} 的计算表达式,具体推导和证明过程见附录A。

基态潮流 $|P_{Bm}^0|$ 的上界 X_m^{Special} 为:

$$|P_{Bm}^0| \leq X_m^{\text{Special}} = \min \left\{ \frac{E_n^{\text{max}} + F_n^{\text{max}}}{|L_{n,m}^{k_2}|}, X_m^{\text{General}} \right\} \quad (35)$$

基态潮流 $|P_{Bn}^0|$ 的上界 X_n^{Special} 为:

$$|P_{Bn}^0| \leq X_n^{\text{Special}} = \min \left\{ E_n^{\text{max}} + |L_{n,m}^{k_2}| F_m^{\text{max}}, X_n^{\text{General}} \right\} \quad (36)$$

显然,这2个上界 X_m^{Special} 与 X_n^{Special} 分别小于3.2节中给出的基态潮流上界 X_m^{General} 与 X_n^{General} ,这有助于得到更小的故障态潮流上界,从而削减更多的冗余约束。

3.3.2 故障态潮流上界

根据式(33),可以通过分离出 $|P_{Bm}^0|$ 和 $|P_{Bn}^0|$ 来推导故障态潮流 $|P_{Bm}^{k_1}|$ 的2个上界 Y_{1m}^{Special} 和 Y_{2m}^{Special} 。

由于推导证明过程较为繁琐,在此直接给出此时 Y_{1m}^{Special} 和 Y_{2m}^{Special} 的计算表达式,具体推导和证明过程见附录B。

上界 Y_{1m}^{Special} 为:

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq Y_{1m}^{\text{Special}} = |L_{m,n}^{k_1}| E_n^{\text{max}} + |1 - L_{m,n}^{k_1} L_{n,m}^{k_2}| X_m^{\text{Special}} \quad (37)$$

上界 Y_{2m}^{Special} 为:

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq Y_{2m}^{\text{Special}} = \left| \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right| E_n^{\text{max}} + \left| L_{m,n}^{k_1} - \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right| X_n^{\text{Special}} \quad (38)$$

同样地, Y_{1m}^{Special} 和 Y_{2m}^{Special} 均是由系统参数确定的常数,在对SCUC问题进行求解之前,就可将其计算出来以削减故障态安全约束。事实上, Y_{1m}^{Special} 和 Y_{2m}^{Special} 也小于3.2节中给出的 Y_j^{General} ,因此本节方法可以进一步删除一些3.2节中没能被删除的约束。

3.3.3 故障态安全约束削减

基于上述讨论, Y_{1m}^{Special} 和 Y_{2m}^{Special} 均为故障态潮流 $|P_{Bm}^{k_1}|$ 的上界,因此,如果 Y_{1m}^{Special} 和 Y_{2m}^{Special} 中的较小者小于或等于支路短期允许载流量(式(39)),则将总是满足故障态安全约束式(33)的 $|P_{Bm}^{k_1}| \leq E_m^{\text{max}}$ (式(40))。

$$\min \{ Y_{1m}^{\text{Special}}, Y_{2m}^{\text{Special}} \} \leq E_m^{\text{max}} \quad (39)$$

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq \min \{ Y_{1m}^{\text{Special}}, Y_{2m}^{\text{Special}} \} \leq E_m^{\text{max}} \quad (40)$$

可知,当条件式(39)成立时,约束 $|P_{Bm}^{k_1}| \leq E_m^{\text{max}}$ 是冗余的。

综上所述,式(27)、(31)、(39)为削减故障态安全约束提供了一种有效的方法。该方法不同于其他大多约束削减方法^[11-12]引入迭代过程或辅助优化问题,因此将节省大量计算时间。

4 算例分析

为验证本文提出的SCUC模型和约束削减方法的有效性和正确性,本节以文献[7]中提出的MILP方法作为SCUC的基础求解方法,对原始SCUC问题和通过本文方法进行约束削减后的SCUC问题的计算结果和计算效率进行比较。

在 Visual Studio 2015 平台上用 C++ 开发相应的 SCUC 问题求解软件,并对 IEEE 30 节点和 IEEE 118 节点测试系统进行仿真测试。仿真环境为具有 Intel®Core™ i5-7300HQ CPU@2.50 GHz 和 8 GB 内存的计算机。在仿真中,选择 CPLEX 12.9 作为 MILP 问题的求解器,其参数设为默认值。发电机的成本函数分段数取 10。支路的短期允许载流量设为长期允许载流量的 1.3 倍。

4.1 IEEE 30 节点测试系统

IEEE 30 节点测试系统的相关数据见文献[17]。考虑到该系统中不含并联支路,不太符合实际电力系统并联支路较多的特征^[9,13],因此将支路都等效为双回线,构成如附录 C 图 C1 所示的 IEEE 30 节点修正系统。在仿真中,根据 $N-1$ 原理考虑 112 个故障(包括 30 条母线和 82 条支路的开断)。

表 1 比较考虑 $N-1$ 故障前、后的 SCUC 问题。可以看出,虽然在考虑 $N-1$ 故障后,总费用增加了 11.35%,但是电力系统的安全性得到了提高。以时段 18 为例,如果执行不考虑 $N-1$ 故障时求解 SCUC 问题得到的调度计划,则母线 2 故障将使支路 1-3 上的有功功率增加到 80.4 MW,超过 58.5 MW 的限制,而当时在 SCUC 问题中考虑 $N-1$ 故障时,将避免该结果。

表 1 考虑 $N-1$ 故障前、后 SCUC 问题对比

Table 1 Comparison of SCUC problem between before and after considering $N-1$ contingency

SCUC 模型	目标函数值 / \$	预想故障数	约束数目	计算时间 / s
不考虑 $N-1$ 故障	141 780.680 27	0	9 550	0.97
考虑 $N-1$ 故障	157 879.018 74	112	181 294	18.74

另一方面,考虑 $N-1$ 故障也给 SCUC 带来计算上的问题。在考虑 $N-1$ 故障后,SCUC 问题的约束数目是原来的 18.98 倍,计算时间也相应变为原来的 19.32 倍,这样的结果是不能接受的。因此有必要使用本文提出的约束削减方法来简化 SCUC 问题,加快求解速度。

表 2 给出了 IEEE 30 节点修正系统的约束削减前、后 SCUC 问题的仿真结果对比。可以看出,引入

表 2 约束削减前、后 IEEE 30 节点系统 SCUC 问题仿真结果对比

Table 2 Comparison of simulative results of SCUC problem for IEEE 30-bus system between before and after constraints reduction

参数	原始 SCUC 模型	约束削减后的 SCUC 模型
目标函数值 / \$	157 879.018 74	157 879.018 74
起作用约束数目	9 488	9 488
总约束数目	181 294	26 614
约束削减时间 / s	—	0.11
优化求解时间 / s	18.74	4.69
总计算时间 / s	18.74	4.80

本文约束削减方法所带来的时间损耗仅为 0.11 s,远小于优化求解所需时间,且 SCUC 问题的规模大幅减小,总约束数目变为原始 SCUC 问题的 14.68%,相应地,总计算时间缩短为原来的 25.61%。这说明本文提出的约束削减方法十分有效,具有实际意义。

另外,由表 2 中 SCUC 问题中的起作用约束数目可见,所提方法不仅准确地识别了冗余约束,而且不会错误地滤除任何起作用的约束。原始 SCUC 与约束削减后 SCUC 的优化结果相同,也证明了这一点。

图 3 比较了约束削减前、后 SCUC 问题中各类约束的数目。可以看出,SCUC 问题中约 93.65% 的约束都是故障态安全约束,基态安全约束仅占很小一部分,约 2.57%,而其他非安全约束约占 3.79%。通过观察各类约束变化可以看出,本文的约束削减方法减少了 42.27% 的基态安全约束和 89.95% 的故障态安全约束,而非安全约束的数量没有改变。这说明本文的约束削减方法主要通过削减 SCUC 问题中的大量故障态安全约束来简化 SCUC 问题。另外,还可以看出,在故障态安全约束中,单断面相关故障态安全约束数量较少,可以将其全部消除,两断面相关安全约束削减幅度较大,减少了 95.92%,而其他故障态安全约束减少了 83.89%。

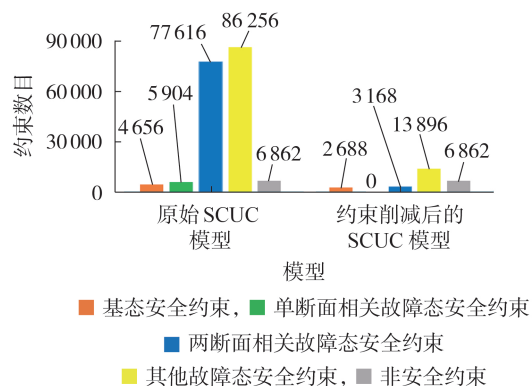


图 3 约束削减前、后各类约束数目对比

Fig.3 Comparison of numbers of each kind of constraint between before and after constraints reduction

为验证所提模型对基态潮流和故障态潮流的计算精度,表 3 统计了 IEEE 30 节点修正系统在基态和母线 6 故障时直流潮流和交流潮流的相对误差对比。

表 3 直流潮流与交流潮流相对误差对比

Table 3 Comparison of relative errors between DC and AC power flow

参数	基态	母线 6 故障
潮流平均相对误差 / %	0.53	4.10
潮流最大相对误差 / %	20.82	59.58
潮流相对误差小于等于 1% 的比例 / %	91.77	73.68

由表 3 可以看出,基态时潮流相对误差较小,最大相对误差为 20.82%,绝大多数情况下相对误差都

在 1% 以内。而在母线 6 故障时,潮流相对误差明显变大,最大相对误差达到 59.58%,但大多数潮流的相对误差仍能保持在 1% 以内。事实上,母线 6 连接 14 条支路,是该系统较为关键的母线,它的开断将导致潮流较大的变化。这表明当某些关键母线故障时,本文直流 SCUC 模型的精度较低,可能导致实际的支路潮流不满足某些安全约束,影响系统的安全性和稳定性。

实际应用中,完成 SCUC 问题的求解后,可以根据优化结果进行直流潮流和交流潮流的计算,从而验证计算结果是否满足精度要求。当误差不满足要求时,对于精度要求不高的场合可以考虑为潮流约束添加一定的安全系数,实现 SCUC 问题的快速近似求解;而对于精度要求高的场合,可以将该 SCUC 问题的解作为更精确优化计算问题(例如基于交流潮流的 SCUC 问题)的一个初始解,通过热启动达到更好的效果。

4.2 IEEE 118 节点测试系统

根据文献[18],IEEE 118 节点测试系统有 186 条支路和 54 台机组。考虑到 IEEE 118 节点测试系统中的并联支路仅有 7 条,不太符合实际电力系统并联支路较多的特征^[9,13],因此将每条支路都等效为双回线,构成 IEEE 118 节点修正系统。在仿真中,根据 $N-1$ 原理考虑 490 个故障(包括 118 个母线和 372 条支路的开断)。

表 4 给出了 IEEE 118 节点修正系统的 SCUC 问题仿真结果的对比。可以看出,引入本文的约束削减方法所带来的时间损耗仅为 0.64 s,远小于优化求解时间,且可以有效地缩减 SCUC 问题的规模,相比于原始问题,约束数目减少了 89.13%,总计算时间也相应缩短了 84.99%。另外,表 4 中还给出了 SCUC 问题中的起作用约束数目和目标函数值,可以看出,本文的约束削减方法仍然没有错误地滤除任何起作用的约束,不会影响 SCUC 问题的最优解。

表 4 约束削减前、后 IEEE 118 节点系统 SCUC 问题仿真结果对比

Table 4 Comparison of simulative results of SCUC problem for IEEE 118-bus system between before and after constraints reduction

参数	原始 SCUC 模型	约束削减后的 SCUC 模型
目标函数值 / \$	815 678.635 72	815 678.635 72
起作用约束数目	43 154	43 154
总约束数目	1 055 661	114 717
约束削减时间 / s	—	0.64
优化求解时间 / s	96.31	13.82
总计算时间 / s	96.31	14.46

为了比较不同方法对不同约束的影响,图 4 给出了各种方法删除的各类安全约束数目以及约束削减前、后 SCUC 模型中各类安全约束数目。图中横

轴 1—6 分别表示原始 SCUC 模型、并联支路安全约束削减、单断面相关故障态安全约束削减、一般故障态安全约束削减、两断面相关故障态安全约束削减、约束削减后的 SCUC 模型。由于非安全约束没有被过滤,因此不列出。

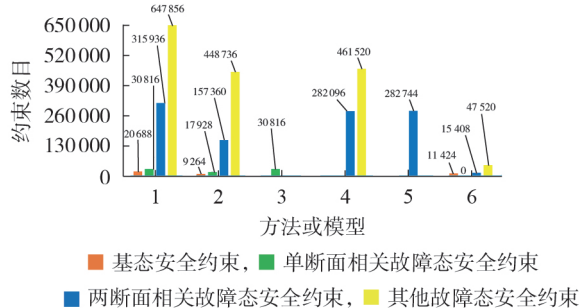


图 4 各种方法削减约束数目对比

Fig.4 Comparison of numbers of reduced constraint among each method

由图 4 可以看出,选择监视支路效果较好,能够削减基态安全约束、单断面相关故障态安全约束、两断面相关故障态安全约束和其他故障态安全约束。式(27)针对单断面故障态安全约束,能削减的约束最少;式(31)主要针对故障态安全约束,其削减的约束最多,效果最好;而式(39)仅针对两断面相关故障态安全约束,其在削减两断面相关故障态安全约束方面效果最好,可以消除 89.49% 的两断面相关故障态安全约束。此外,还可以看出,故障态安全约束是导致 SCUC 问题规模庞大的主要原因。考虑到本文的约束削减方法主要针对故障态安全约束,该方法可能对大规模 SCUC 问题更有效。注意到削减的故障态安全约束总数不等于 SCUC 模型中减少的故障态安全约束数目,这说明这几种方法删除的故障态安全约束存在重叠。

表 5 比较了 IEEE 30 节点和 IEEE 118 节点修正系统中各类约束削减比例。IEEE 118 节点修正系统中的并联支路比例为 51.88%,略高于 IEEE 30 节点修正系统中的 50%,并且在 IEEE 118 节点修正系统

表 5 不同测试系统中本文方法效果对比

Table 5 Comparison of effect of proposed method between different test systems

参数	IEEE 30 节点修正系统	IEEE 118 节点修正系统
并联支路安全约束削减比例 / %	42.27	44.78
单断面相关故障态安全约束削减比例 / %	100	100
两断面相关故障态安全约束削减比例 / %	95.92	95.12
其他故障态安全约束削减比例 / %	83.89	92.67
总约束削减比例 / %	85.32	89.13

中,本文所提出的约束削减方法能够删除的并联支路安全约束更多,这说明随着并联支路比例的提高,所提方法削减并联支路安全约束的效果更好。另外,从表5中可以看出,IEEE 118节点修正系统中能够删除的冗余故障态安全约束比例也有所提高。综合来看,本文提出的约束削减方法在IEEE 118节点修正系统中更有效,能够删除的约束比例更高,缩短计算时间的效果更显著。

值得指出的是,采用本文提出的约束削减方法可以将IEEE 30节点和IEEE 118节点修正系统的SCUC问题中的约束数目分别减少到原始SCUC问题的14.68%和10.87%,但是根据表2和表4的统计,在2次仿真中的起作用约束数目分别只有9488、43154个,仅分别占削减后SCUC模型中约束的35.65%和37.62%。这表明分别仍有64.35%和62.38%的约束是不起作用约束,因此,可以进一步探索更为有效的约束削减方法。

5 结论

本文提出考虑 $N-1$ 故障的SCUC问题的MILP模型,并提出相应的约束削减方法来简化SCUC问题,最后采用IEEE 30节点和IEEE 118节点测试系统进行仿真验证。本文主要贡献如下:将SCUC建模为可直接通过商用求解器求解的MILP问题;给出有效的约束削减方法,可以大幅削减SCUC问题的计算规模以及缩短求解时间;提出的约束削减方法只删除冗余约束,而不会影响起作用约束,因此不会改变SCUC问题的最优解。

本文采用的SCUC模型基于直流法潮流方程,没有考虑电压幅值等约束。在后续工作中,将研究使用交流潮流方程描述的更为精确的SCUC问题,并寻找更有效的约束削减方法和求解方法。

附录见本刊网络版(<http://www.epae.cn>)。

参考文献:

- [1] 汪洋,夏清,康重庆. 机组组合算法中起作用整数变量的辨识方法[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30(13): 46-52.
WANG Yang, XIA Qing, KANG Chongqing. Identification of the active integer variables in security constrained unit commitment[J]. Proceedings of the CSEE, 2010, 30(13): 46-52.
- [2] 郑海艳,简金宝,全然,等. 基于改进的Benders分解与透视图平面的机组组合算法[J]. 电力自动化设备, 2015, 35(1): 133-138.
ZHENG Haiyan, JIAN Jinbao, QUAN Ran, et al. Unit commitment algorithm based on improved Benders decomposition and perspective cut[J]. Electric Power Automation Equipment, 2015, 35(1): 133-138.
- [3] 陈光宇,张仰飞,郝思鹏,等. 基于解集动态分析含风电接入的多目标机组组合研究[J]. 电力自动化设备, 2018, 38(7): 97-107.
CHEN Guangyu, ZHANG Yangfei, HAO Sipeng, et al. Multi-objective unit commitment with wind farms based on dynamic
- analysis of solution set[J]. Electric Power Automation Equipment, 2018, 38(7): 97-107.
- [4] FRANGIONI A, GENTILE C, LACALANDRA F. Tighter approximated MILP formulations for unit commitment problems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2009, 24(1): 105-113.
- [5] FU Y, LI Z Y, WU L. Modeling and solution of the large-scale security-constrained unit commitment[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(4): 3524-3533.
- [6] 朱永利,刘刚,黄政,等. 基于二进制微分进化算法和目标函数分解的大规模机组组合求解[J]. 电力自动化设备, 2019, 39(10): 150-156, 173.
ZHU Yongli, LIU Gang, HUANG Zheng, et al. Large-scale unit commitment solution based on binary differential evolution algorithm and objective function decomposition[J]. Electric Power Automation Equipment, 2019, 39(10): 150-156, 173.
- [7] 葛晓琳,裴晨皓. 考虑电动汽车随机特性的机组组合问题研究[J]. 电力自动化设备, 2018, 38(9): 77-84.
GE Xiaolin, PEI Chenhao. Study on unit commitment problem considering stochastic characteristics of electric vehicles[J]. Electric Power Automation Equipment, 2018, 38(9): 77-84.
- [8] ZHAI Q Z, GUAN X H, CHENG J H, et al. Fast identification of inactive security constraints in SCUC problems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2010, 25(4): 1946-1954.
- [9] 郭瑞鹏,边麟龙,宋少群,等. 安全约束最优潮流的实用模型及故障态约束缩减方法[J]. 电力系统自动化, 2018, 42(13): 161-168.
GUO Ruipeng, BIAN Linlong, SONG Shaoqun, et al. Practical model of security constrained optimal power flow and reduction methods for contingency constraints[J]. Automation of Electric Power Systems, 2018, 42(13): 161-168.
- [10] 李大虎,孙建波,陈冰松,等. 基于风险指标与非支配故障筛选理论的安全约束机组组合算法[J]. 电力科学与技术学报, 2016, 31(4): 65-72.
LI Dahu, SUN Jianbo, CHEN Bingsong, et al. Security constrained unit commitment algorithm based on risk index and non-dominated contingency screening theory[J]. Journal of Electric Power Science and Technology, 2016, 31(4): 65-72.
- [11] TEJADA-ARANGO D A, SÁNCHEZ-MARTÍN P, RAMOS A. Security constrained unit commitment using line outage distribution factors[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(1): 329-337.
- [12] ARDAKANI A J, BOUFFARD F. Acceleration of umbrella constraint discovery in generation scheduling problems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(4): 2100-2109.
- [13] 刘阳,鄢发齐,汪咏,等. 热稳定薄弱断面搜索及限额制定的在线算法[J]. 电力系统自动化, 2020, 44(21): 156-164.
LIU Yang, YAN Faqi, WANG Yang, et al. Online algorithm for searching and limit setting of thermal-stability weak section[J]. Automation of Electric Power Systems, 2020, 44(21): 156-164.
- [14] MOLZAHN D K. Identifying redundant flow limits on parallel lines[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(3): 3210-3212.
- [15] 陈伟,郭瑞鹏,叶琳,等. 电网断面热稳定限额计算模型及方法[J]. 电力系统自动化, 2012, 36(17): 20-24.
CHEN Yi, GUO Ruipeng, YE Lin, et al. Calculation model and method for thermal stability control limit to transmission interfaces in a power grid[J]. Automation of Electric Power Systems, 2012, 36(17): 20-24.
- [16] CARRION M, ARROYO J M. A computationally efficient mixed-integer linear formulation for the thermal unit commitment problem[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2006, 21

(3):1371-1378.

- [17] MA H, SHAHIDEHPOUR S M, MARWALI M K C. Transmission constrained unit commitment based on Benders decomposition[C]//Proceedings of the 1997 American Control Conference. Albuquerque, NM, USA:IEEE, 1997:2263-2267.
- [18] FU Y, SHAHIDEHPOUR M, LI Z Y. Security-constrained unit commitment with AC constraints[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2005, 20(3):1538-1550.



王砚平

究方向为电力系统调度、电力系统优化运行(**E-mail**: wang.yanping@foxmail.com);

鲍 威(1986—),男,浙江绍兴人,助理研究员,博士,通信作者,主要研究方向为电力系统优化算法、机器学习(**E-mail**: baowei@zju.edu.cn);

李 赢(1984—),男,浙江龙游人,工程师,硕士,主要研究方向为电网运行方式与稳定分析(**E-mail**: liying1886@163.com)。

(编辑 王锦秀)

作者简介:

王砚平(1996—),男,辽宁铁岭人,硕士研究生,主要研

Model and constraint-reduction method for security-constrained unit commitment considering $N-1$ contingency

WANG Yanping¹, BAO Wei¹, LI Ying², YAO Silei², GUO Ruipeng¹, LIN Ling¹, KUANG Jing¹

(1. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

2. Zhoushan Power Supply Company of State Grid Zhejiang Electric Power Co., Ltd., Zhoushan 316000, China)

Abstract: The scale of SCUC (Security-Constrained Unit Commitment) problem considering $N-1$ contingency is huge, and its numerical solution is very difficult, for which, a mixed-integer linear programming model is built and a constraint-reduction method is proposed. The constraint-reduction method includes two steps: the branches needed to be monitored are selected according to the relationship of power flow between parallel branches, so that the security constraints of parallel branches are reduced; the upper bound of post-contingency power flow is deduced and compared with the branch capacity of post-contingency to remove redundant post-contingency security constraints. The constraint-reduction method can greatly reduce the scale and solution time of SCUC problem without changing the optimal solution. The simulative and analysis results of IEEE 30- and 118-bus test systems verify the effectiveness of the proposed model and constraint-reduction method.

Key words: security-constrained unit commitment; $N-1$ contingency; mixed-integer linear programming; constraint-reduction method; monitored branch; upper bound of post-contingency power flow

附录 A:

下面给出考虑两断面相关故障态安全约束时，基态潮流 $|P_{Bm}^0|$ 与 $|P_{Bn}^0|$ 上界 X_m^{Special} 与 X_n^{Special} 的具体推导证明过程。

(1) 基态潮流 $|P_{Bm}^0|$ 的上界。

故障态安全约束式 (34) 如下所示:

$$|P_{Bn}^0 + L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0| \leq E_n^{\max} \quad (\text{A1})$$

由反三角不等式 $|a| - |b| \leq |a + b|$ 可以得到:

$$|L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0| - |P_{Bn}^0| \leq E_n^{\max} \quad (\text{A2})$$

经过移项有:

$$|L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0| \leq E_n^{\max} + |P_{Bn}^0| \quad (\text{A3})$$

考虑到 $|P_{Bn}^0|$ 的基态安全约束 $|P_{Bn}^0| \leq F_n^{\max}$ ，可以将该不等式中 $|P_{Bn}^0|$ 替换掉:

$$|L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0| \leq E_n^{\max} + F_n^{\max} \quad (\text{A4})$$

不等式两侧同时除以 $|L_{n,m}^{k_2}|$ ，由于其一定大于 0，因此不等号方向不需改变:

$$|P_{Bm}^0| \leq \frac{E_n^{\max} + F_n^{\max}}{|L_{n,m}^{k_2}|} \quad (\text{A5})$$

考虑到式 (28)，已经推导出 $|P_{Bm}^0| \leq X_m^{\text{General}}$ 。将其与上式结合，可以得到此时基态潮流 $|P_{Bm}^0|$ 的上界:

$$|P_{Bm}^0| \leq \min \left\{ \frac{E_n^{\max} + F_n^{\max}}{|L_{n,m}^{k_2}|}, X_m^{\text{General}} \right\} = X_m^{\text{Special}} \quad (\text{A6})$$

(2) 基态潮流 $|P_{Bn}^0|$ 的上界。

首先，考虑故障态安全约束式 (34):

$$|P_{Bn}^0 + L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0| \leq E_n^{\max} \quad (\text{A7})$$

根据另一种形式的三角不等式 $|b| - |a| \leq |a + b|$ 可以得到:

$$|P_{Bn}^0| - |L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0| \leq E_n^{\max} \quad (\text{A8})$$

然后进行移项:

$$|P_{Bn}^0| \leq E_n^{\max} + |L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0| \quad (\text{A9})$$

根据 $|P_{Bm}^0|$ 的基态安全约束 $|P_{Bm}^0| \leq F_m^{\max}$ ，上述不等式可变为:

$$|P_{Bn}^0| \leq E_n^{\max} + |L_{n,m}^{k_2}| F_m^{\max} \quad (\text{A10})$$

考虑到 3.2 节中已推导出 $|P_{Bn}^0| \leq X_n^{\text{General}}$ ，将其与上式结合，可以得到此时基态潮流 $|P_{Bn}^0|$ 的上界:

$$|P_{Bn}^0| \leq \min \{ E_n^{\max} + |L_{n,m}^{k_2}| F_m^{\max}, X_n^{\text{General}} \} = X_n^{\text{Special}} \quad (\text{A11})$$

很明显， X_m^{Special} 与 X_n^{Special} 均紧于 3.2 节中给出的基态潮流上界 X_m^{General} 与 X_n^{General} 。

附录 B:

下面给出考虑两断面相关故障态安全约束时，故障态潮流 $|P_{Bm}^{k_1}|$ 的 2 个上界 Y_{1m}^{Special} 和 Y_{2m}^{Special} 的具体推导证明过程。

(1) 第一个上界 Y_{1m}^{Special} 。

考虑故障态潮流 $|P_{Bm}^{k_1}|$ 的表达式：

$$|P_{Bm}^{k_1}| = |P_{Bm}^0 + L_{m,n}^{k_1} P_{Bn}^0| \quad (\text{B1})$$

对其进行拆分，以分离出 $|P_{Bm}^0|$ ：

$$|P_{Bm}^{k_1}| = |L_{m,n}^{k_1} L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0 + L_{m,n}^{k_1} P_{Bn}^0 + (1 - L_{m,n}^{k_1} L_{n,m}^{k_2}) P_{Bm}^0| \quad (\text{B2})$$

由三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ 可得：

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq |L_{m,n}^{k_1} (L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0 + P_{Bn}^0)| + |(1 - L_{m,n}^{k_1} L_{n,m}^{k_2}) P_{Bm}^0| \quad (\text{B3})$$

考虑到 $|ab| \leq |a||b|$ ，有：

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq |L_{m,n}^{k_1}| |L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0 + P_{Bn}^0| + |1 - L_{m,n}^{k_1} L_{n,m}^{k_2}| |P_{Bm}^0| \quad (\text{B4})$$

根据故障态安全约束式 (34)， $|L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0 + P_{Bn}^0| \leq E_n^{\max}$ ，因此下式成立：

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq |L_{m,n}^{k_1}| E_n^{\max} + |1 - L_{m,n}^{k_1} L_{n,m}^{k_2}| |P_{Bm}^0| \quad (\text{B5})$$

由附录 A 得， $|P_{Bm}^0| \leq X_m^{\text{Special}}$ ，因此此时故障态潮流 $|P_{Bm}^{k_1}|$ 的上界 Y_{1m}^{Special} 如下所示：

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq |L_{m,n}^{k_1}| E_n^{\max} + |1 - L_{m,n}^{k_1} L_{n,m}^{k_2}| X_m^{\text{Special}} = Y_{1m}^{\text{Special}} \quad (\text{B6})$$

(2) 第二个上界 Y_{2m}^{Special} 。

同样地，先考虑考虑故障态潮流 $|P_{Bm}^{k_1}|$ 的表达式：

$$|P_{Bm}^{k_1}| = |P_{Bm}^0 + L_{m,n}^{k_1} P_{Bn}^0| \quad (\text{B7})$$

此时分离出 $|P_{Bn}^0|$ ：

$$|P_{Bm}^{k_1}| = \left| P_{Bm}^0 + \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} P_{Bn}^0 + \left(L_{m,n}^{k_1} - \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right) P_{Bn}^0 \right| \quad (\text{B8})$$

由三角不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ 可得：

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq \left| \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} (L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0 + P_{Bn}^0) \right| + \left| \left(L_{m,n}^{k_1} - \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right) P_{Bn}^0 \right| \quad (\text{B9})$$

考虑到 $|ab| \leq |a||b|$ ，有：

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq \left| \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right| |L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0 + P_{Bn}^0| + \left| L_{m,n}^{k_1} - \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right| |P_{Bn}^0| \quad (\text{B10})$$

根据故障态安全约束式 (34)， $|L_{n,m}^{k_2} P_{Bm}^0 + P_{Bn}^0| \leq E_n^{\max}$ ，因此下式成立：

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq \left| \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right| E_n^{\max} + \left| L_{m,n}^{k_1} - \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right| |P_{Bn}^0| \quad (\text{B11})$$

由附录 A 得， $|P_{Bn}^0| \leq X_n^{\text{Special}}$ ，因此此时故障态潮流 $|P_{Bm}^{k_1}|$ 的上界 Y_{2m}^{Special} 如下所示：

$$|P_{Bm}^{k_1}| \leq \left| \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right| E_n^{\max} + \left| L_{m,n}^{k_1} - \frac{1}{L_{n,m}^{k_2}} \right| X_n^{\text{Special}} = Y_{2m}^{\text{Special}} \quad (\text{B12})$$

附录 C:

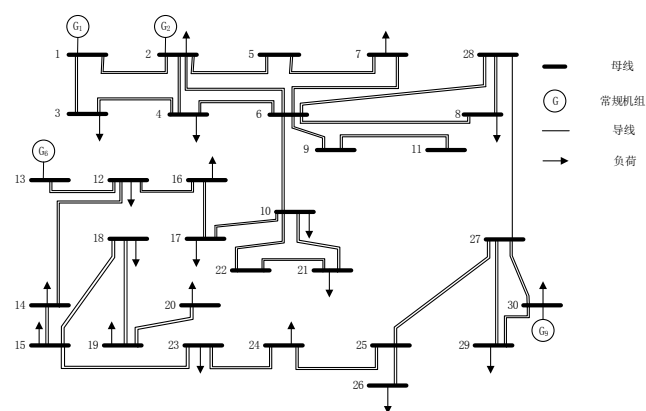


图 C1 IEEE 30 节点修正系统拓扑结构图
Fig.C1Topological diagram of modified IEEE 30-bus system